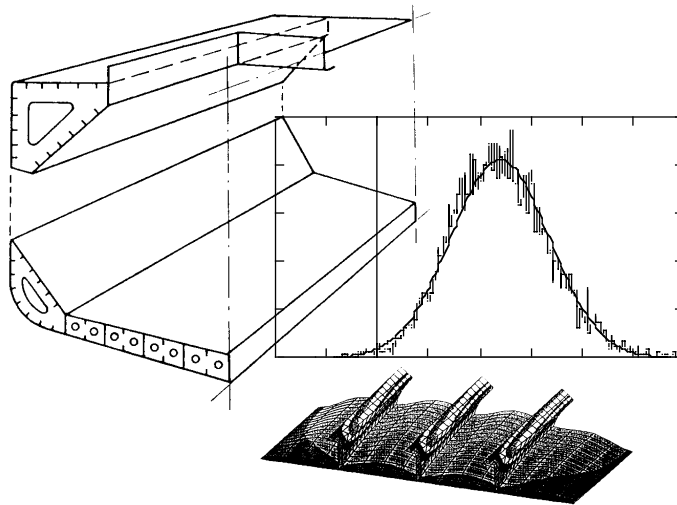




TRITA-FKT  
Kompedium 9936  
ISSN 1103-470X  
ISRN KTH/FKT/SKP/K--99/36--SE

Föreläsninganteckningar i  
**Skrovkonstruktion**  
Beräkningsmetoder för dimensionering

av  
Mikael Huss



Stockholm  
1999

**SKEPPSTEKNIK**  
INSTITUTIONEN FÖR FARKOSTTEKNIK  
KUNGL TEKNISKA HÖGSKOLAN



KUNGL  
TEKNISKA  
HÖGSKOLAN

Augusti 1999

**SKEPPSTEKNIK**  
INSTITUTIONEN FÖR FARKOSTTEKNIK

Föreläsninganteckningar i  
**Skrovkonstruktion**  
Beräkningsmetoder för dimensionering

av

Mikael Huss

TRITA-FKT  
Kompedium 9936  
ISSN 1103-470X  
ISRN KTH/FKT/SKP/K--99/36--SE

---

*Adress*  
Skeppsteknik  
Inst för Farkostteknik, KTH  
100 44 Stockholm

*Besöksadress*  
Osquars Backe 33

*Telefon*  
Direkt 08 - 790 +dnr  
Skr 08 - 790 7521  
Växel 08 - 790 6000

*Fax*  
08 - 790 6684

# Föreläsninganteckningar i Skrovkonstruktion Beräkningsmetoder för dimensionering

## Innehåll

### Förord

### Referenser

## 1 Introduktion

- 1.1 Konstruktionselement
- 1.2 Belastningar
- 1.3 Långskeppsstyrka

## 2 Balkmetoder

- 2.1 Introduktion
- 2.2 Effektiv fläns
- 2.3 Balksystem
- 2.4 Matrismetod
- 2.5 Idealisering
- 2.6 Plasticering
- 2.7 Torsion

## 3 FEM

- 3.1 Introduktion till teorin
- 3.2 Modellering

## 4 Buckling

- 4.1 Introduktion
- 4.2 Plåtfält
- 4.3 Paneler
- 4.4 Gränslast

## 5 Utmattning

- 5.1 Introduktion
- 5.2 Dimensioneringsmetoder

## 6 Probabilistiska metoder

- 6.1 Introduktion
- 6.2 Nivå 2 - metoder
- 6.3 MonteCarlo simulering
- 6.4 System - Processer
- 6.5 Beräkningsexempel

## **Förord till 2:a upplagan 1999:**

Detta häfte utgör en sammanslagning av de tidigare Föreläsninganteckningarna;  
Del 1 (Introduktion, Balkmetoder) tryckt 1995 och Del 2 (FEM, Buckling, Utmattning, Probabilistiska metoder) tryckt 1997.

Innehåll, siduppdelning och figurmaterial är oförändrat men ett fåtal rättelser och justeringar i textmaterialet har införts.

Den stora skillnaden inför denna omtryckning är att hela materialet nu överförs på digital form vilket förhoppningsvis kommer att underlätta en snabbare uppgradering i framtiden.

---

## Förord till 1:a upplagan 1995:

### Några förord ... ... om syftet

Föreliggande häfte är egentligen inte i vanlig mening ett kompendium, och definitivt inte en lärobok. Det är således ingen slump att jag valt att kalla det för föreläsningssanteckningar. För att sätta in den här texten i sitt rätta sammanhang vill jag ge en kort beskrivning av hur utbildningen inom ämnet skrovkonstruktion är upplagd på KTH.

Den officiella målbeskrivningen lyder:

*Målsättningen med kursen är att ge kunskaper om beräkningsmetoder och kriterier för dimensionering av fartygsskrov och deras ingående konstruktions-element.*

*Kursen ska ge färdighet i att självständigt utföra och värdera olika konstruktionslösningar.*

För att nå dessa mål har jag valt att dela in kursen i tre delar med ungefär lika stor arbetsinsats men med olika grad av tillämpning och olika arbetsformer.

1 *Föreläsningar som sammanfattar de viktigaste beräkningsmetoderna för skrovdimensionering.*

Föreläsningssdelen är i stor utsträckning en repetition av grundläggande hållfasthetslära-/strukturmekanik som studenterna förutsetts ha läst i tidigare tekniska baskurser. Framställningen är därför ganska svepande och jag försöker rikta den mot hur beräkningsmetoderna i praktiken kan utnyttjas för dimensioneringsändamål och hur de är kopplade till skrovbyggnadsregler.

2 *Beräkningsexempel med handräkningsmetoder.*

Dessa genomförs som obligatoriska hemuppgifter i anslutning till föreläsningarna och som delmoment inom konstruktionsuppgiften. Uppgifterna ger förståelse för hur lastupptagningen sker i fartygsstrukturer och hur man genom förenklingar och idealiseringar kan göra överslagsberäkningar av nominella spänningar och deformationer i konstruktions-elementen. Kursens skriftliga tentamen kontrollerar i första hand kunskaper och färdigheter inom detta område.

3 *Konstruktionsuppgifter med dimensionering enligt klassregler och med FEM.*

Individuellt eller parvis genomförs dimensionering av samtliga bärande förband i midskeppsdelen av ett modernt handelsfartyg. Uppgifterna ges sådan spridning att de täcker in de vanligaste skrovtyperna. Någon del av strukturen kontrollräknas för ett statiskt designlastfall med FEM. Resultaten föredras muntligt och redovisas i kortfattad skriftlig rapport. Detta kursmoment ger framför allt insikt i hur fartyg är uppbyggda och vilka dimensioneringskriterier som används i klassreglerna. Det ger också en första erfarenhet av möjligheter och problem med finita element analys som grund för dimensionering.

Mina föreläsningssanteckningar i den form som presenteras här har sammanställts under de två första åren som jag givit kursen. De definierar mitt urval av vad som är väsentligt att gå igenom i föreläsningssform inom ramarna för det första kursavsnittet enligt ovan, deras enda syfte är att utgöra ett stöd för inläringen. Jag vill därför understryka att innehållet inte på något sätt täcker in hela teknikområdet skrovkonstruktion.

## ... om utformningen

Föreläsningssanteckningarna har en form som skiljer sig från vanlig löpande text i kompendier och läroböcker. Med några undantag är de utformade så att varje sida står för sig själv och har ett mer eller mindre avslutat budskap. Texten är därför mycket kortfattad och ibland mera att betrakta som stödord till minnet. Av samma skäl finns en eller flera figurer på praktiskt taget varje sida. Dessa figurer kan vara allt ifrån enkla handskisser till klipp ur läroböcker, tidskrifter eller exempel ur klassreglerna.

Jag har tidigare under många år delat ut handskrivna löpande anteckningar med skisser och klipp direkt kopplade till de kompendier som användes då. Dessa mycket råa anteckningar som huvudsakligen gjordes för mitt eget minne, blev till min förvåning uppskattade till den grad att de för många elever i praktiken kom att ersätta kompendierna (vilket inte alls var syftet). Orsaken, som jag har förstått det, låg just i den mycket koncentrerade utformningen. När jag nu bläddrar igenom dessa föreläsningssanteckningar i samlad form, upptäcker jag att jag under renskrivningen ibland förletts att bli lite mera utförlig i texten än tidigare vilket kanske har gjort att några av sidorna nu blivit mindre visuellt tydliga. Jag hoppas att detta inte ska förta helhetsintrycket.

Den helt dominerande delen av matematiska uttryck och beräkningar är utförda i Mathcad. Det har gjort att jag under föreläsningarna kunnat visa hur resultaten förändras som följd av ändrade indata och ansatser. Jag har också delat ut ganska omfattande direkta lösningar på olika problem som kompletterande kursmaterial. Min erfarenhet är att det har inneburit stora pedagogiska fördelar att kunna lösa beräkningsproblem med datorn samtidigt som hela beräkningsgången finns tillgänglig på papper. En nackdel med typografin i Mathcad är dock att det inte går att använda decimalkomma. Jag ber därför om överseende med att det förekommer en ständig blandning av kommatecken och punkt genom hela materialet. Det borde trots allt framgå av sammanhanget vad som menas.

## ... om innehållet

Föreläsningssanteckningarnas omfattning och innehåll har styrts av tre faktorer: lärobokens utformning, kursens omfattning och en tradition av förväntningar på vad en 'skeppsbyggare' ska kunna om skrovkonstruktion.

Som kurslitteratur används O. F. Hughes bok *Ship Structural Design - A Rationally Based, Computer Aided, Optimization Approach* (SSD). Boken innehåller en systematisk genomgång av de framför allt matrisformulerade beräkningsmetoder som ligger till grund för det unika integrerade beräknings- och optimeringsprogrammet MAESTRO. I mina föreläsningar har jag valt att presentera beräkningsmetoderna separat och i första hand koppla dem till dagens dimensioneringsprocedurer med hjälp av klassregler snarare än som delar i ett integrerat system. Stor vikt har därför lagts vid balkmetoder eftersom de utgör grunden för reglernas definition av "nominella" spänningar som kriterium för hållfastheten i konstruktionen. I vissa avseenden har jag gjort en utvidgad framställning jämfört med läroboken. Det gäller framför allt begreppet effektiv fläns (shear lag) och torsion av öppna fartyg där jag knyter an till tidigare kompendier vid institutionen. I gengäld har jag helt lämnat de mera avancerade matrisformuleringarna som utgör en betydande del av läroboken. Det finns knappast möjlighet att inom kursens ram fördjupa sig inom detta område men SSD kan förhoppningsvis tjäna som referenslitteratur för fortsatta studier.

Både läroboken och dessa föreläsningssanteckningar saknar konkreta beräkningsexempel på verkliga fartygsstrukturer. Som beskrivits ovan har jag försökt att inom hemuppgifter och konstruktionsuppgifter (del 2 och 3) arbeta med verkliga skrovkonstruktioner. Möjligen kommer jag att så småningom kunna trycka ett antal genomräknade tillämpade exempel som en ytterligare del i kursmaterialet. Jag har gjort bedömningen att det skulle bli alldeles för omfattande och rörigt om jag blandade in sådana realistiska exempel i föreläsningssanteckningarna. Det fåtal exempel som återfinns här är därför mycket förenklade och har enbart syftet att illustrera metoderna.

### ... om skrovkonstruktion

Konstruktion av fartygsskrov är en mycket speciell verksamhet som är helt styrd av klassificeringssällskapens byggnadsregler. Dessa utgör en blandning av erfarenhetsdata från tusentals driftår med handelsfartyg och direkta beräkningsmetoder. Det är därför ofta svårt att värdera betydelsen av noggranna beräkningar eftersom det finns en stor osäkerhet i hur väl lastfall och kriterier svarar mot verkligheten. Klassreglerna måste därför uppfattas som en helhet som rätt applicerad ger en acceptabel styrka i fartygsskrovet. Det är en näst intill omöjlig uppgift att för studenter på en teoretisk teknisk högskola förklara den kultur och successiva utveckling som återspeglas i reglerna, utan att man samtidigt förklarar dem värdelösa! Erfarenheten visar dock att de i huvudsak fungerar mycket bra och ger väl optimerade fartyg (så länge man håller sig till traditionella konstruktioner). Säkerhetsmarginalerna är faktiskt så hårt pressade att man ligger på gränsen till vad som kan anses vara acceptabelt både med hänsyn till risken för människoliv och med hänsyn till fartygens livstidskostnad. Konstruktionsreglerna förutsätter därför både regelbundna inspektioner och ett omdömesgillt handhavande av fartyget.

De försök som på senare år gjorts att genomföra sk direkt dimensionering med teoretiska/probabilistiska modeller av både belastningshistorien och styrkan har visat sig leda till betydligt kraftigare strukturer om säkerhetsfaktorer jämförbara med andra konstruktioner ska appliceras. Det empiriska inslaget i byggnadsreglerna verkar således snarare icke-konservativt än konservativt.

Under de senaste decennierna har reglerna dock utvecklats mycket, från att vara rena "kokböcker" med dimensioneringsformler till att idag mera föreskriva krav på olika typer av beräkningar. Framför allt möjligheten att göra omfattande FE-analyser verkat pådrivande i denna riktning. De senaste åren har det också introducerats regler och rekommendationer för direkt utmattningsdimensionering och för användandet av probabilistiska metoder. Det är inte självklart att denna utveckling kommer att leda till "lättare" fartyg, men däremot bör den öka möjligheterna att optimera konstruktionselementen och använda nya material i konstruktionen. Den stora osäkerheten som ligger i vågbelastningar och fartygets handhavande kvarstår och måste lösas genom ökad kontroll av fartygen under drift.

På följande sida visas en schematisk sammanställning av olika dimensioneringsprocedurer och de osäkerheter som är kopplade till dem. Utvecklingen går successivt allt längre ner i tabellen. Idag inkluderar det praktiska arbetet på konstruktionskontoren de första tre delarna medan forskningsfronten ligger inom de tre sista. (Tabellen har publicerats i Proceedings of the 12th International Ship and Offshore Structures Congress, 1994).

Procedure:	Loads:	Capability:	Criteria:
"Rule-book"  limited to conventional structures	Quasi-static  prescribed, based on ship geometry and standard load cases	Scantling formulas  direct evaluation of scantlings	Experience based  explicit as max. stress levels or included in scantling formulas
Direct deterministic  limited in principal to still-water loads	Quasi static  model uncert. in choice of load case	Linear elastic response  model uncert. in fe-analysis	Max. nominal stress levels  safety factors based on experience
Fatigue, linear cumulative damage approach  limited to high cycle fatigue, neglecting influence from load sequence	Long-term probability distribution of loads  model and random uncert. in wave load distribution	Long-term hot-spot stress distribution, SN-curve  model uncert. in combined wave-induced local stresses, large scatter in SN-data	Usage factor  based on experience, incl. corrosion, consequence of a fatigue damage etc.
Limit state - ultimate strength  limited to fundamental collapse studies, must be combined with probabilistic modelling if used in practical design	Long-term extreme loads  model and random uncert. in extreme load and load effect estimation, incl. insufficient wave statistics, non-linearities, load combination, heavy weather manoeuvring	Yielding, buckling, progressive collapse  model uncert. in non-linear structural response, random uncert. in initial condition incl. imperfections, corrosion	Redundancy, safety factor on design conditions  based on accepted risk levels in the society
Full probabilistic  in theory no limitations, in practice limited by insufficient statistical data	Probability distributions of life-time loads  all uncert. above represented by prob. distributions	Statistical distributions of capability  all uncert. above represented by prob. distributions	Accepted probability of failure  individually defined dependent on consequence of structural failure

## ... om förebilder

Min upplägning av undervisningen inom skrovkonstruktion har naturligtvis inte kommit till oberoende av den tradition som länge funnits på KTH. Bland förebilderna vill jag framhålla professor em Erik Steneroth vars kunskap och långa erfarenhet inom området varit av ovärderlig betydelse för mig. Han har fungerat som mentor när jag tagit över kursen, och han bidrar fortfarande med att sprida ljus och insikt genom sin medverkan i konstruktionsövningarna. Mina egna lärare i grundutbildningen har också fungerat som förebilder. Bland dessa vill jag nämna Lars-Ivar Nero som ambitiöst introducerade begreppet föreläsningssanteckningar och som levde upp till den pedagogiska inställningen att alla som deltog i kursen måste lära sig förstå. Jag hade också glädjen att ha professor Anders Ulfvarsson som lärare. Jag tillskriver honom äran att ha fått mig själv att tycka att skrovkonstruktion är spännande och kreativt.

KTH i augusti 1995  
Mikael Huss

---



## Referenser

### Litteratur:

Föreläsningssanteckningarnas syfte och uppläggning diskuteras i förordet till Del 1, de utgör ett komplement till kurslitteraturen, i första hand:

*Ship Structural Design - A Rationally Based, Computer Aided, Optimization Approach*, O.F. Hughes, SNAME 1988

Övrig rekommenderad kurslitteratur på områden som inte täcks tillräckligt av SSD är:

*Ship Design and Construction*, ed R. Taggart, SNAME 1980

*Fatigue Handbook*, ed A. Almar-Næss, TAPIR, NTH, 1985

*Probabilistisk Dimensionering*, U. Björkenstam, Marin Teknik, CTH 1992

I tillägg till dessa har jag utnyttjat en del kompletterande material från tidigare kompendier utgivna av skeppsbyggnad/KTH, framför allt: *Effektiv Fläns*, E. Steneroth, T. Milchert, *Torsion av öppna fartyg*, E. Steneroth, H. Rödén, A. Ulfvarson, och *Buckling och Knäckning*, A. Ulfvarson.

För den som vill fördjupa sig inom något område som berörs i kursen, rekommenderas att studera referenslistorna i kurslitteraturen ovan.

### Figurer:

I den fria form som föreläsningssanteckningarna har givits, har jag inte bedömt det vara meningsfullt att ange referenser till varje inklippt figur eller ekvation. Här nedan följer därför en lista på källorna till de flesta figurerna. I några fall har det varit oklart varifrån figuren ursprungligen härrör. Den kan ha cirkulerat i flera olika kompendier innan jag lånat den här, och jag ber därför om överseende med eventuella felaktiga källangivelser.

### Källor till illustrationer:

### Sidnr:

*Ship Structural Design - A Rationally Based, Computer Aided, Optimization Approach*, O.F. Hughes, SNAME 1988

1.1.3, 1.2.2, 1.2.4, 1.2.6, 1.3.1-2, 1.3.6-7, 1.3.9-10, 2.1.7, 2.4.7, 2.5.9, 2.5.11, 2.6.1-3, 2.6.5, 2.7.3, 2.7.6, 2.7.30, 3.1.17, 3.1.18, 3.2.9, 3.2.12, 3.2.17, 3.2.19, 4.1.4-5, 4.2.1-8, 4.3.4, 4.4.1-3, 5.2.2, 6.1.3

*Det Norske Veritas, utdrag ur skrovbyggnadsregler, Guidelines, Class. Notes, forskningsrapporter*

1.1.15, 1.1.17, 1.2.9, 1.3.7-8, 1.3.11, 2.1.8, 2.2.25-26, 2.5.2, 2.5.4, 2.5.13-16, 2.7.38-42, 3.1.3, 4.1.2, 5.2.6

*Fatigue Handbook*, ed A. Almar-Næss, TAPIR, NTH, 1985

5.1.2-6, 5.1.8-11, 5.2.3-4

*Ship Design and Construction*, ed R. Taggart, SNAME 1980

1.3.3-4, 1.1.9, 1.1.11-12, 1.1.14, 1.1.17, 2.1.6, 2.7.1, 5.1.1

viii  
*Referenser*

<u>Källor till illustrationer:</u>	<u>Sidnr:</u>
<i>Probabilistisk Dimensionering, U. Björkenstam, Marin Teknik, CTH 1992</i>	6.1.5-6, 6.2.3, 6.2.5, 6.2.8, 6.4.1-2
<i>Fartygsskrovets konstruktionselement, Figurdel, E. Steneroth, T. Milchert, A. Ulfvarson, Skeppsbyggnad KTH, 1972</i>	Omslag Del1, 1.1.2, 1.1.5, 1.1.9-10, 1.1.13, 2.1.6, 2.5.1, 3.2.2
<i>Finite element modelling of ship structures, Stif- telsen Svensk Skeppsforskning, Report 146, 1978</i>	3.1.1, 3.2.4, 3.2.7, 3.2.11, 3.2.13, 3.2.21-22
<i>Lloyds Register of Shipping, utdrag ur skrovbyggnadsregler, Guidelines, Class. Notes, forskningsrapporter</i>	1.1.10, 1.1.12, 1.1.17, 2.7.36-37, 3.2.12
<i>Merchant Ship Construction, D.A. Taylor, But- terworth, 1980</i>	1.1.6, 1.1.14, 1.1.16, 2.5.6
<i>Buckling och Knäckning, A. Ulfvarson, Skepps- byggnad KTH, 1980</i>	4.2.7-8
<i>Fartygsteknik, U. Jahnke, B. Kjellstenius, R. Olsson, Liber Hermods, 1986</i>	1.1.7
<i>Koncernstandard, Götaverken, 1973</i>	1.1.8
<i>Påkänningar under transport, T. Trost, Pack- forsk medd. nr 96, 1985</i>	1.2.5
<i>Probabilistic models for load effects in ship structures, C.G. Soarse, NTH, 1984</i>	1.2.6
<i>Styrkeberegning af maritime konstruktioner, P.T. Pedersen, J.J. Jensen, DTH 1982</i>	2.1.1
<i>Torsion av öppna fartyg, E. Steneroth, H. Rödén, A. Ulfvarson, Skeppsbyggnad KTH, 1981</i>	2.7.20
<i>Fatigue Characterization of Fabricated Ship Details for Design, W.H. Munse, SSC-318, 1983</i>	5.2.1
<i>Global Wave Statistics, BMT, 1986</i>	5.2.11
<i>BETA Mathematics Handbook, L.Råde, B. West- ergren, Studentlittertur, 1988</i>	6.3.2

## Inledning

### Viktiga designmål för skrovkonstruktionen:

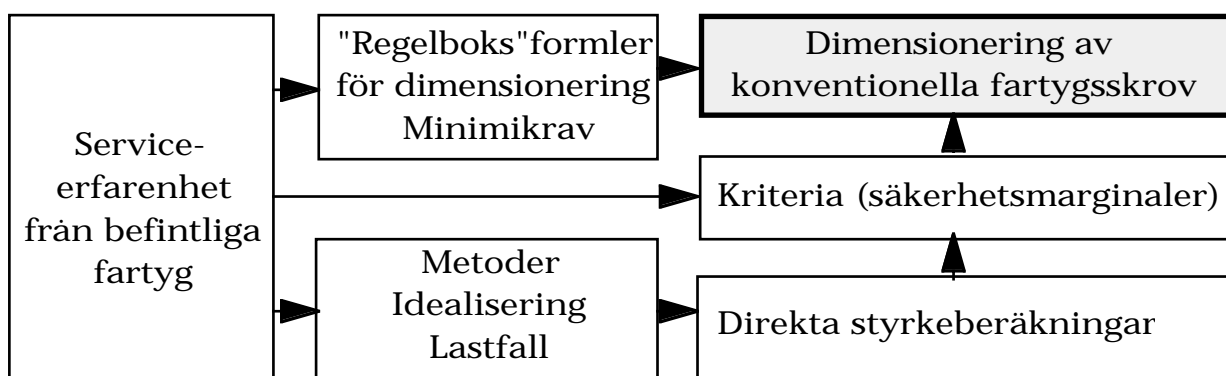
Funktionalitet  
Säkerhet  
Vikt  
Tillförlitlighet  
Kostnad för  
Tillverkning  
Underhåll  
Drift  
Inspektions-  
åtkomlighet

Lastfartyg projekteras med optimalt transportarbete som huvudmål. Det betyder att fartygets huvuddimensioner, lastrumsarrangemang etc till allt väsentligt bestäms av uppgiften (med säkerhets- och miljöskyddskrav som nödvändiga bivillkor)

Skrovkonstruktion med dimensionering av fartygets styrkeelement görs när arrangemanget i huvudsak är fastställt. Varje konstruktionslösning blir unik och hållfastheten måste verifieras för varje enskilt fartyg (eller i undantagsfall, för varje serie av identiska fartyg).

Skrovvikt och byggkostnader spelar en mycket stor roll för fartygets inköpspris och framtida lönsamhet. Därför strävar man efter att i konstruktionslösningen optimera vikt och kostnad så långt som möjligt utan att äventyra säkerheten. Eftersom fartygs skrov är uppbyggda av ett antal tusen plåtfält, förstövningar och konstruktionsdetaljer inses lätt att det vore en helt omöjlig uppgift att i detalj analysera varje enskilt element. Speciellt som konstruktionsarbetet bara får ta några månader i anspråk. Ytterligare ett problem är att man inte kan förutse alla yttre och inre laster och kombinationer av dessa som kommer att uppkomma under ett fartygs livstid (ca 20 år).

Konstruktionslösningen måste därför med nödvändighet grundas på erfarenhet. Detta gäller såväl antagna laster som strukturens hållfasthet och acceptabla säkerhetsmarginaler.



## Klassregler

### Några stora kända klassningssällskap:

Lloyds Register of Shipping, LR (1760)

Bureau Veritas, BV (1828)

Registro Italiane Navale, RINA (1861)

American Bureau of Shipping, ABS (1862)

Det norske Veritas, DnV (1864)

Germanischer Lloyd, GL (1867)

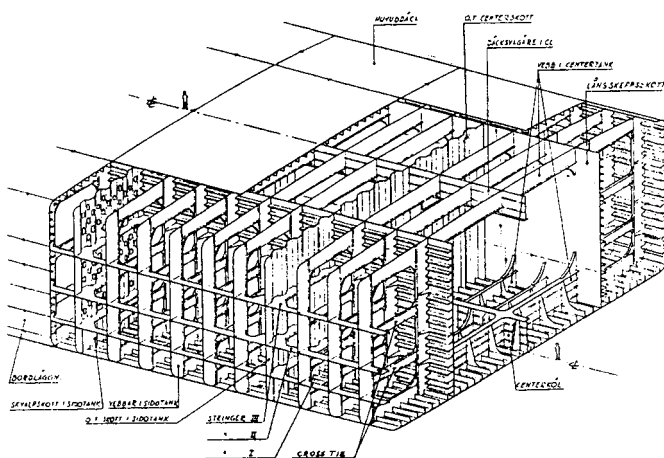
Nippon Kaiji Kyokai, NKK (1899)

Den största samlade erfarenheten finns hos klassificeringssällskapen (*Classification Society*). Varje nybyggt större fartyg godkänns av "klassen" som kontrollerar konstruktionsritningar och inspekterar fartygets byggnation. För att få behålla sin klass genomgår fartyget regelbundna översyner (*surveys*) där man noggrant kontrollerar strukturen och reparerar eventuella skador eller svåra korrosionsangrepp. Pga detta finns hos klassen erfarenhet samlad från tusentals driftsår av olika typer av fartygskonstruktioner. Dessa erfarenheter återspeglas i skrovkonstruktionsregler (*Rules*), som ges ut av resp sällskap och som i princip måste följas för att fartygets ska bli godkänt (klassat) och kunna försäkras.

Reglerna innehåller minimikrav på dimensioner och materialkvaliteter men också föreskrifter om vilka beräkningar som krävs för att bevisa att fartyget har erforderlig styrka, vilka laster som ska ansättas i beräkningarna och vilka spänningsnivåer som kan accepteras under dessa laster.

Utöver reglerna styrs naturligtvis konstruktionen av varvets standard, anpassad för produktionen.

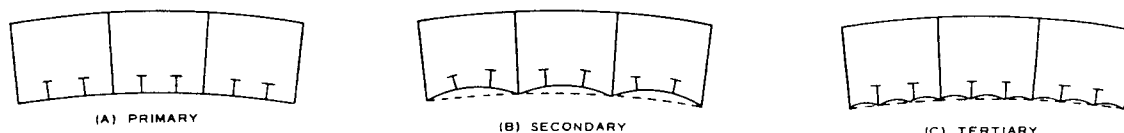
## Fartygsskrovets "anatomik"



Skrovet på ett fartyg är uppbyggt som ett "skelett" av lastbärande element täckta av en yttre bordläggning. Ytterplåten är förhållandevis tunn (ca 12 mm för ett 100m fartyg, ca 22 mm för en 300m tanker) och kan inte ensam och oförstyvad bära tillnärmelsevis det tryck som den utsätts för. Däremot ingår den som en integrerad del i de förstyvningar och bärande balkar som är svetsade till plåten och som utgör det lastupptagande skelettet.

## Olika nivåer av lastupptagning

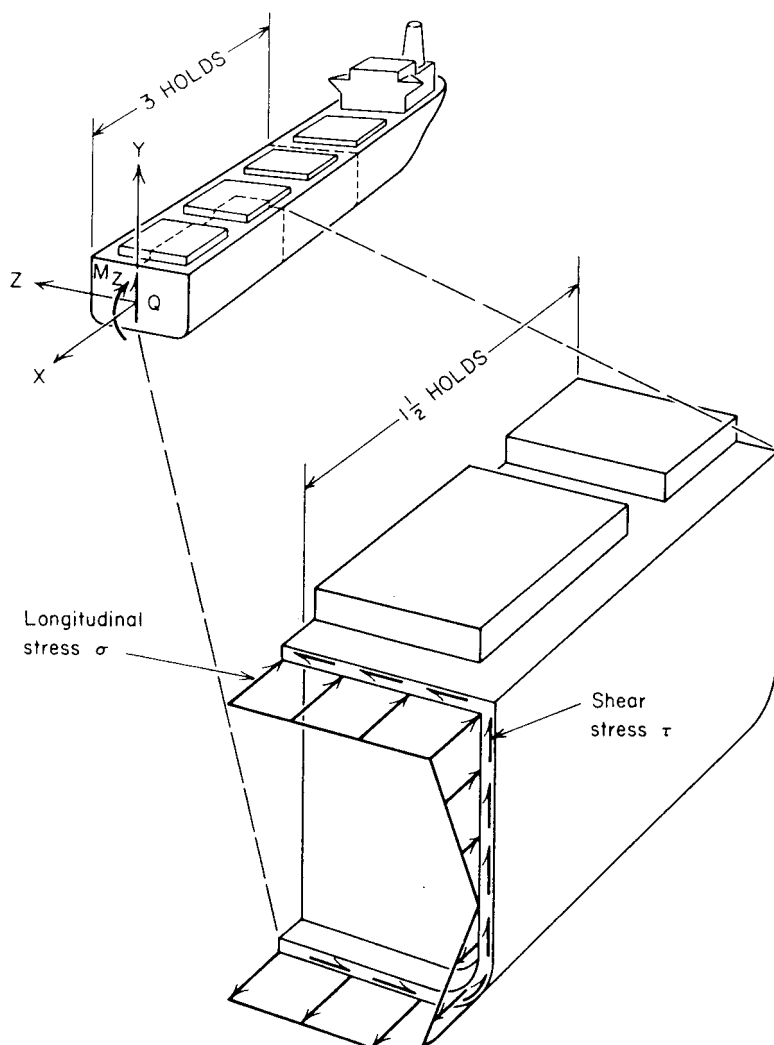
Fartygsskrovets lastupptagning kan delas upp i tre nivåer. De olika konstruktionselementen kan samtidigt medverka på flera nivåer, på en lokal nivå som lastbärare, och på en högre nivå som delkomponenter i en större lastbärande struktur.



## Skrovbalken

(hull girder)

Detta är den högsta nivån. Alla lokala skillnader mellan yttre och inre laster tas slutligen upp som tvärkrafter och moment i fartygsskrovet betraktat som en enda stor balk där sidobordläggning (och ev längskeppsskott) utgör liv, och däck och botten flänsar.



Det vertikala böjmomentet blir normalt dimensionerande för skrovbalken och ger upphov till längskeppsgående drag- eller tryckspänningar i däck och botten. Skrovbalkens styrka benämns därför ofta längskeppsstyrka, (*longitudinal strength*).

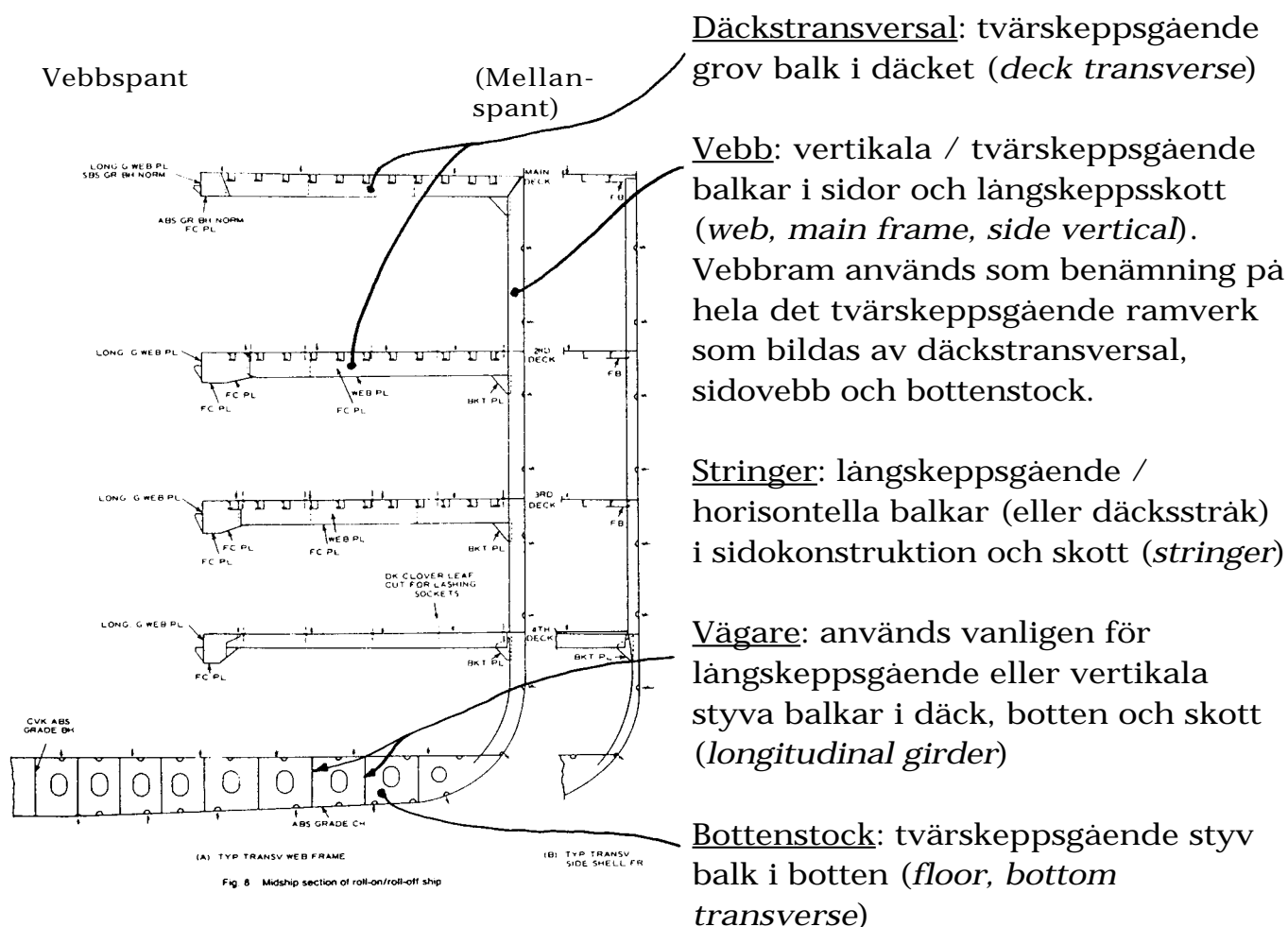
Alla konstruktionselement med kontinuerlig, tillräckligt lång utsträckning i fartygets längsled medverkar med sin tvärsnittsarea i längskeppsstyrkan. Störst effekt för att öka skrovbalkens böjmotstånd ( $W = I/y$ ) och därmed sänka böjspänningarna ( $\sigma = M/W$ ) får element som ligger långt från skrovbalkens neutrallager, dvs de element som ingår i däck och bottenstrukturen.

## Primära styrkeförband

(girder)

kallas de konstruktionselement som utgör de primära lastbärarna på lokal nivå och som ser till att skrovbalken bibehåller sin form under belastning (skelettet). De utgörs normalt av kraftiga balkar som sammanbinder skrovbalkens olika huvudelement: skrovsidorna, tvärskeppsskotten, däck och botten. De kan därför sträcka sig antingen längskepps, tvärskepps eller vertikalt i skrovet. De element som har utsträckning i längskeppsled medverkar väsentligt till skrovbalkens styrka, medan de övriga endast bär last lokalt. I traditionellt skeppsbyggeri restes först tvärskepps (vertikalt) gående spant på vilka bordläggningen fästes. De lokala styrkeförbanden benämns därför ofta som fartygets tvärskeppsstyrka (*transverse strength*) även om det i modernt skeppsbyggeri är minst lika vanligt med längskeppsgående lokala styrkeförband.

Några vanliga benämningar:



Däckstransversal: tvärskeppsgående grov balk i däck (*deck transverse*)

Vebb: vertikala / tvärskeppsgående balkar i sidor och längskeppsskott (*web, main frame, side vertical*). Vebbram används som benämning på hela det tvärskeppsgående ramverk som bildas av däckstransversal, sidovebb och bottenstock.

Stringer: längskeppsgående / horisontella balkar (eller däckstråk) i sidokonstruktion och skott (*stringer*)

Vägare: används vanligen för längskeppsgående eller vertikala styva balkar i däck, botten och skott (*longitudinal girder*)

Bottenstock: tvärskeppsgående styv balk i botten (*floor, bottom transverse*)

## Sekundära förband, Förstyvningar

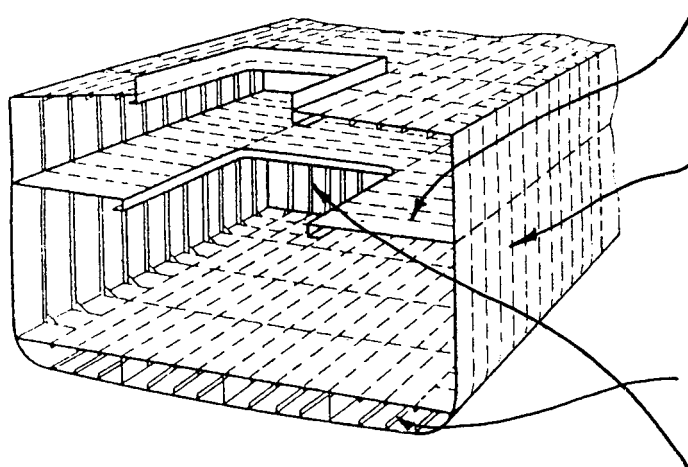
(*stiffener*)

kallas de konstruktionselement som har till huvuduppgift att styva upp plåtfälten. De fungerar som lokala lastbärare för lateralt belastade plåtfält (*panel*, *panel*) och överför last till de korsande primära styrkeförbanden, eller de kan fungera som mera renodlade bucklingsförstyvningar.

I vissa konstruktionslösningar kan man effektivt sammanföra funktionerna av plåtförstyvning och primärt styrkeförband (tex för små fartyg). I de flesta fall är det (för större fartyg) viktoptimalt att införa två olika nivåer av lokal lastupptagning.

För att förenkla konstruktion och produktion av det otal förstyvade paneler som finns i ett fartygsskrov är det vanligt att införa ett generellt spantavstånd (*frame spacing*) som genomgående används (eller jämn multipel därav) för både tvärskepps- och längskeppsförstyvningar i större delen av fartygsskrovet. Beroende på vilken lokal last som panelen utsätts för varierar sedan plåttjockleken och dimensionerna på förstyvningarna. För vanliga handelsfartyg ligger spantavståndet på 0,6 - 0,9 m.

Några vanliga benämningar:



Balk: används huvudsakligen för tvärgående däcksförstyvningar (*beam*)

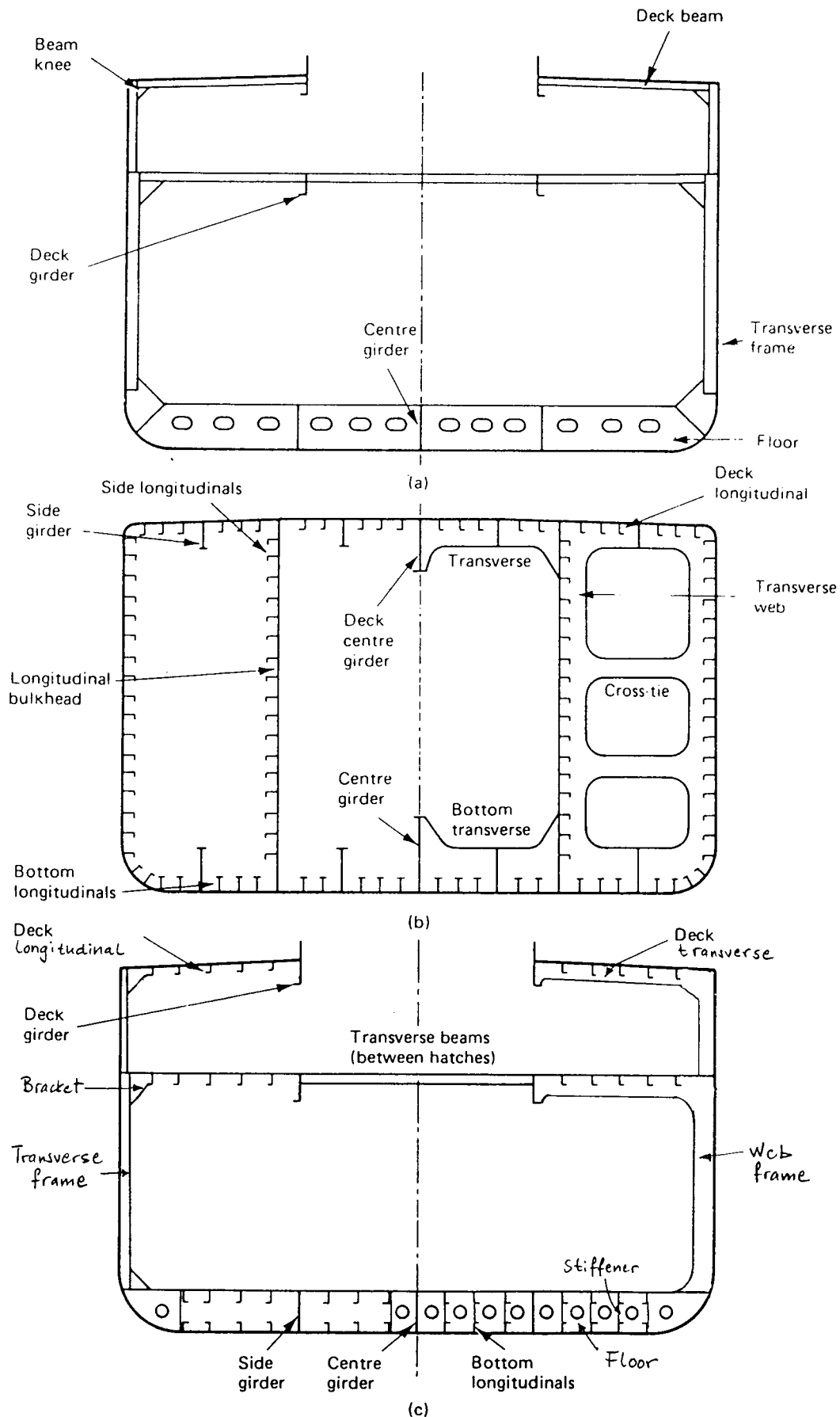
Spant: används på svenska generellt, på engelska för tvärskepps (vertikala) förstyvningar (*frame*)

Longitudinal: längskeppsgående förstyvning (*longitudinal*)

Stag: används för skottens förstyvningar, samt generellt för lokala förstyvningar (*stiffener*)

Torrlastfartyg med kombination av längskepps- och tvärskeppsspant.

## Jämförelse mellan olika spanningssystem



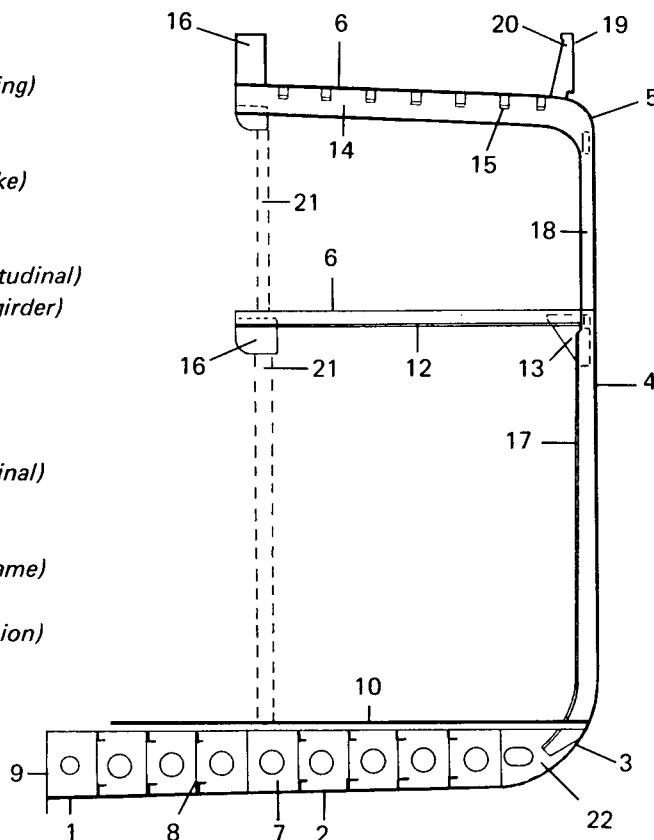
*Framing systems: (a) transverse framing; (b) longitudinal framing; (c) combined framing*



## Exempel på konstruktionselement

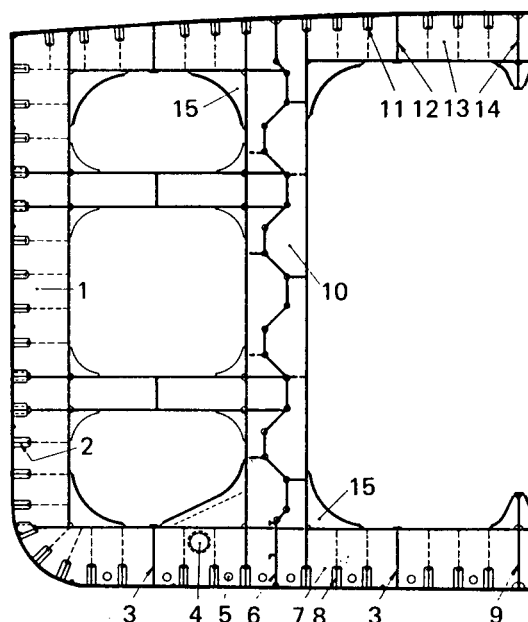
Torrlastfartyg med längskeppsspant i huvuddäck (styrkedäck) och botten, och tvärskeppsspant i bordläggning och mellandäck.

- 1 Kölplåt (*keel plate*)
- 2 Bottenbordläggning (*bottom plating*)
- 3 Slagstråk (*bilge strake*)
- 4 Sidobordläggning (*side plating*)
- 5 Skärstråk, språngstråk (*sheer strake*)
- 6 Däcksplåt (*deck plating*)
- 7 Bottenstock (*floor*)
- 8 Bottenlongitudinal (*bottom longitudinal*)
- 9 Centerlinjevägare (*bottom centergirder*)
- 10 Garnering (*ceiling*)
- 12 Däcksbalk (*deck beam*)
- 13 Balkbricka (*beam knees*)
- 14 Däcksbalk (*deck transvers*)
- 15 Däckslongitudinal (*deck longitudinal*)
- 16 Luckkarm (*hatchway coaming*)
- 17 Huvudspant (*main frame*)
- 18 Mellandäcksspant (*tween deck frame*)
- 19 Brädgång (*bulwark*)
- 20 Brädgångsstötta (*bulwarks stanchion*)
- 21 Stötta (*pillar*)
- 22 Slagbricka (*tank side bracket*)



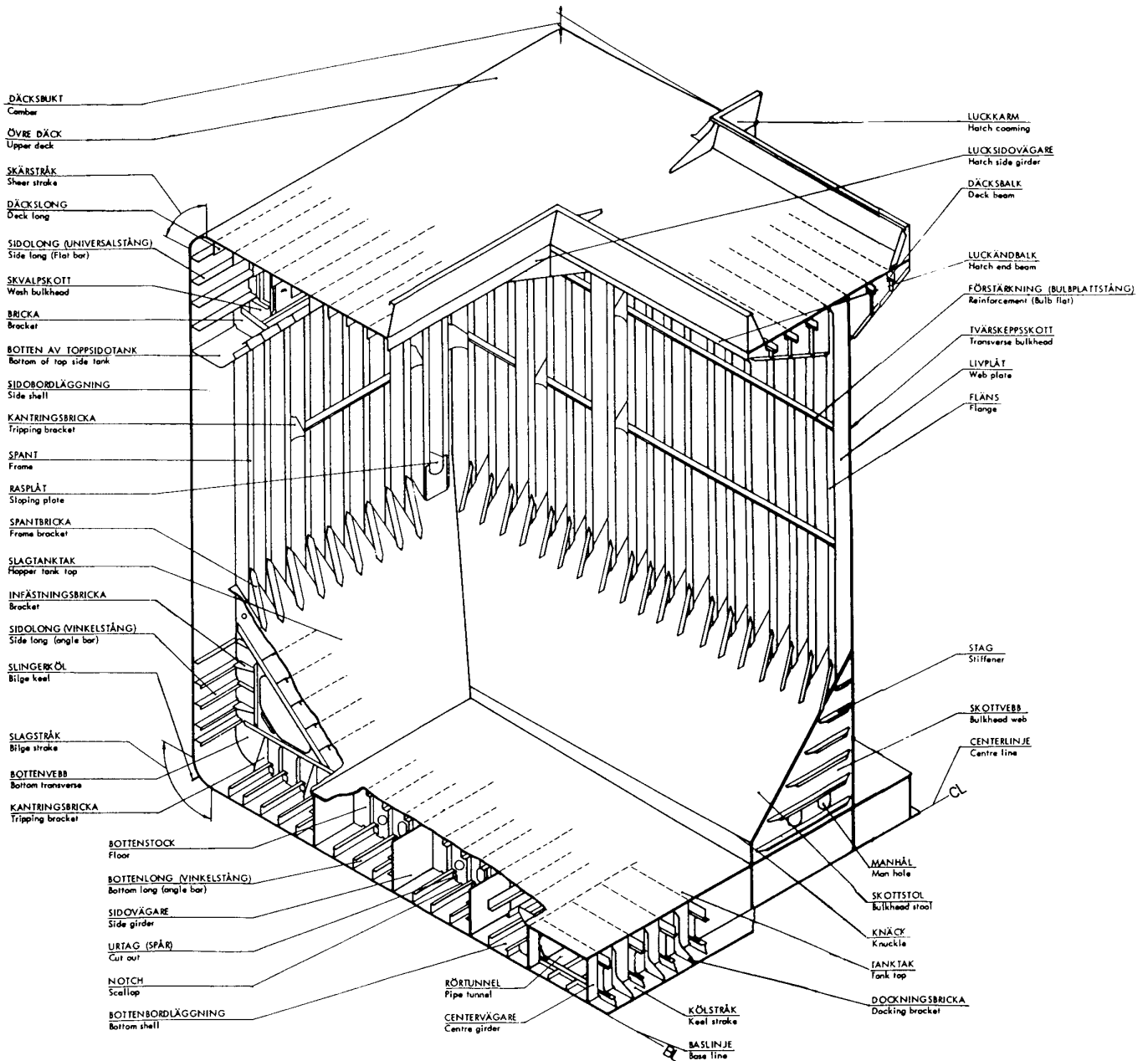
## Tankfartyg med enbart längskeppsspant

- 1 Sidovebb
- 2 Sidolongitudinal
- 3 Sidovägare
- 4 Hål för lastoljedning
- 5 Hål för värmeslingor
- 6 Längskeppsskott
- 7 Bottenvebb
- 8 Bottenlongitudinal
- 9 Centerköl
- 10 Skottvebb
- 11 Däckslongitudinal
- 12 Däckssidovägare
- 13 Däcksvebb
- 14 Däckscentervägare
- 15 Övergångsbricka



## Exempel på konstruktionselement

Bulkfartyg med längskeppsspant i dubbelbotten, sidotankar och sidodäck, tvärskeppsspant mellan sidotankar och i däckstrimlor mellan lastrummen, vertikala skottstag.

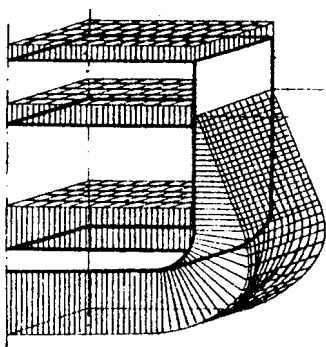


## Bottenkonstruktioner

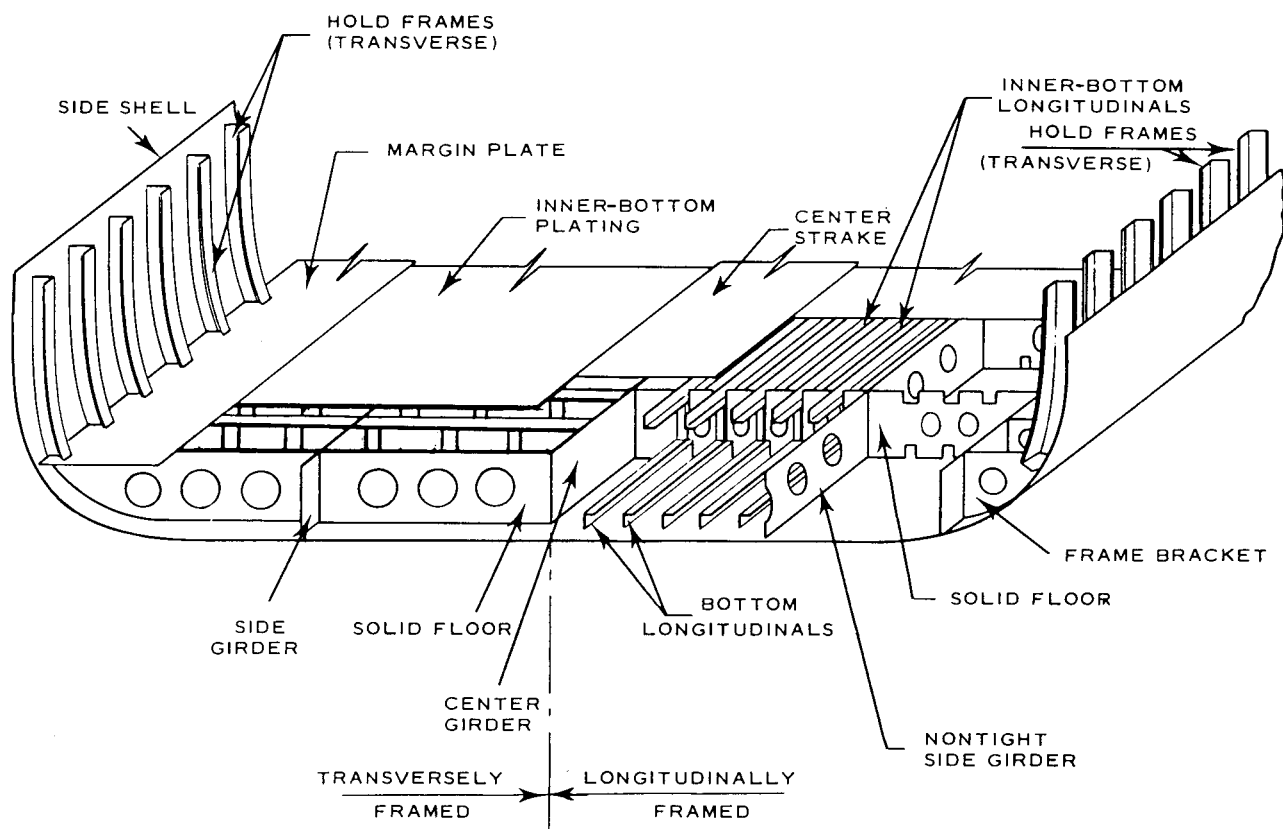
Handelsfartyg byggs idag med dubbel botten. Ur styrkesynpunkt är detta fördelaktigt då bordläggningssplåtarna (ytterbotten, innerbotten/tanktak) blir effektivt utnyttjad för den lokala stykan som flänsar till de primära styrkeförbanden (bottenvägare, bottenstockar).

I torrlastfartyg vill man dessutom för att förenkla lasthanteringen ha slät innerbotten.

Tankfartyg har tidigare vanligen byggts med enkel botten. Ur miljöskyddssynpunkt har man 1993 enats internationellt inom IMO (MARPOL -73/78 13F) om att kräva dubbel bordläggning på alla nybyggda tankfartyg över 3000 tdw (dubbel botten för 600 - 3000 tdw) för att förhindra utsläpp av last vid en grundstötning.



De huvudsakliga lokala belastningarna på bottenkonstruktionen består av lateralt tryck, antingen från yttre hydrostatiskt övertryck (tomma lastrum) eller från inre övertryck (fulla lastrum). Dubbelbotten används dessutom oftast som bunker- eller ballasttankar och avgränsande plåtfält och förstävningar måste därför dimensioneras för att klara en tryckhöjd motsvarande höjden upp till tankarnas överfyllnadsrör över däck.



## Bottenlongitudinaler

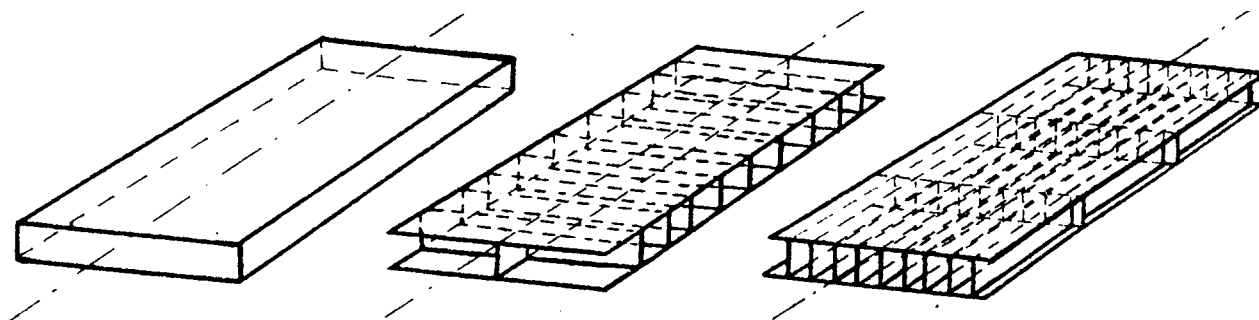
Bottenkonstruktionen bidrar väsentligt till skrovbalkens längskeppsstyrka. För att öka längskeppsstyrkan används därför (för större fartyg) longitudinaler som förstävningar på bordläggningsplåten.

## Bottenstockar

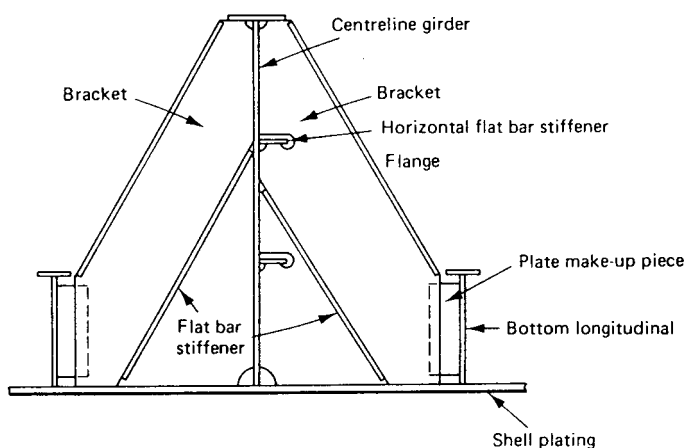
Den laterala lokala lasten på plåtfälten, överförs via longitudinalerna till bottenstockar som sträcker sig mellan fartygssidorna och där för över lasten till skrovbalken. Bottenstockar appliceras normalt på ett avstånd av ca 3-5 spantavstånd mellan varandra.

## Bottenvägare

Vinkelrätt mot bottenstockarna löper bottenvägare som för över last i längskeppsriktningen till tvärskeppsskotten. Hela bottenkonstruktionen kan därför liknas vid ett gallerverk (*grillage*) inspänt i lastrummets sidor och skott. Delningen i de två huvudriktningarna väljs bla beroende på lastrummets längd/bredd förhållande.



## Förstärkning mot lokala laster vid dockning

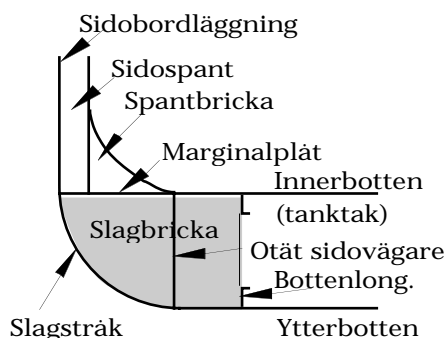


Centervägaren fyller också den viktiga uppgiften att fördela de höga lokala belastningar som kan uppstå vid dockning av fartyget. På vardera sidan om centervägaren appliceras tätt med dockningsbrickor. Plättjockleken i kölstråket görs av samma skäl grövre än i den omgivande bottenplåten.

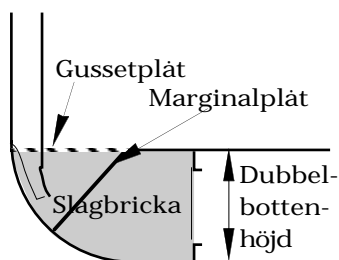
## Slaget

(bilge)

Slagstråket är det krökta plåtfält som ansluter ytterbotten till sidobordläggningen. Innerbottens avslutning vid sidan kallas marginalplåt. Den begränsar botten tankens utbredning, och kan vara horisontell, sned, eller vertikal. Mellan slagstråk och marginalplåt appliceras slagbrickor på varje spantavstånd. Dessa utgör förbindelselänk mellan sido- och bottenstrukturen.



### Exempel på alternativ:

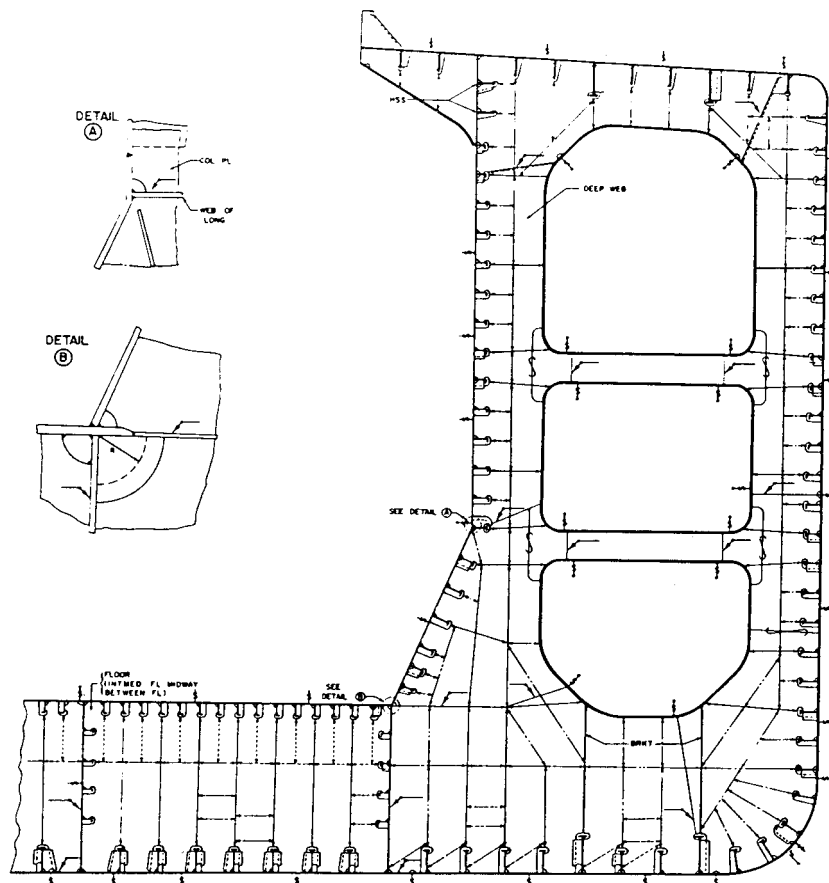


Dubbelbottenhöjden bestäms i huvudsak av kravet på bottenstrukturens styvhet samt att den ska vara åtkomlig för inspektion. Vanligen ligger den i området 1,2 - 2 m (minimihöjden enl DnV Rules -92:  $250+20B+50T$  mm, min 650 mm). För tankfartyg över 30 000 tdw enligt nya MARPOL-reglerna krävs minst 2 m dubbel botten och sidobordläggning.

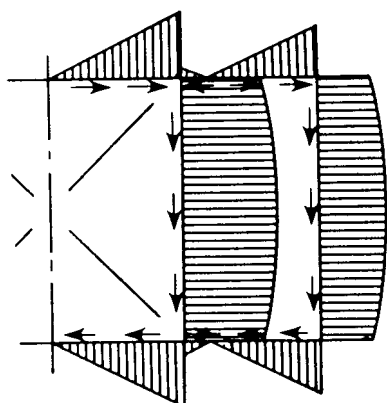
För bulkfartyg avsedda att gå med mycket tung last, tex malm, kan det vara en fördel att öka dubbelbottenhöjden för att höja lasttyngdpunkten och därmed minska fartygets rullningsaccelerationer

## Dubbelbottenhöjd

Exempel på bulkfartyg med förhöjd dubbelbotten i centerrummet:

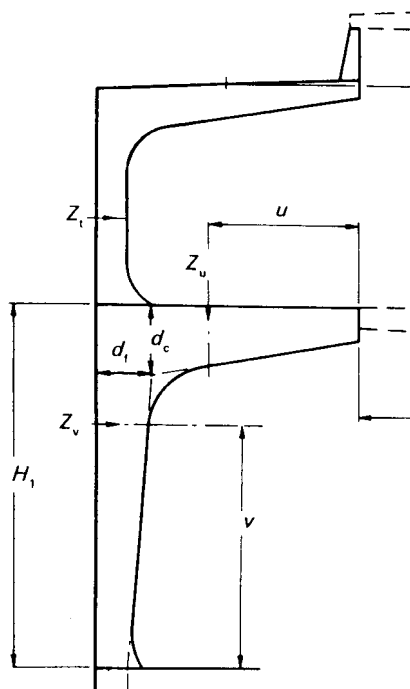


## Sidokonstruktionen



tillsammans med eventuella längskeppsskott utgör skrovbalkens livplåtar vid vertikal belastning. Till dessa överförs via bottenstockar och tvärskeppsskott de vertikala tvärkrafterna utefter fartygets längd. Plättjockleken i bordläggningen måste vara tillräcklig för att hålla skjuvspänningarna på en rimlig nivå.

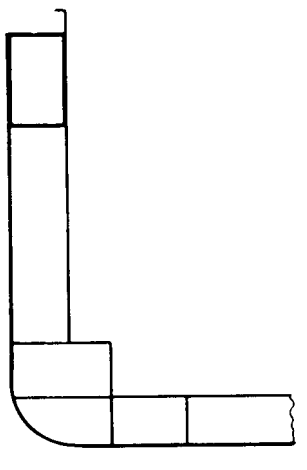
Sidokonstruktionen måste vidare kunna ta upp de lokala belastningarna från yttre vattentryck och (i tankar) från inre tryck från lasten. Bordläggningsplåten förstyrkas därför med spant och primära styrkeförband (sidovebbar, stringerplåtar) på samma sätt som bottenkonstruktionen. Ifall fartyget ska kunna gå i is förstärks bordläggningen ytterligare lokalt kring vattenlinjen med tätare spant och tjockare plåt.



Eftersom längskeppsmaterialet i sidobordläggningen spelar en underordnad roll för skrovbalkens böjmotstånd kan man välja att lägga förstyvningarna längskepps (längskeppsspantat) eller vertikalt (tvärskeppsspantat) beroende på vilket som blir effektivast med hänsyn till den lokala styrkan, lasthantering och andra faktorer.

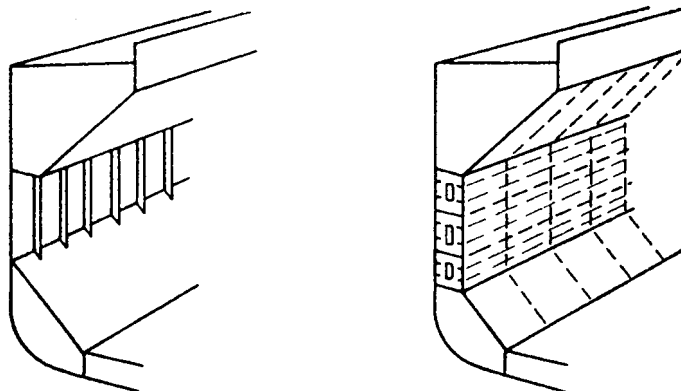
I torrlastfartyg med mellandäck används oftast enkel bordläggning med tvärskeppsspant mellan däcken. Lasten på däcken måste tas upp och föras över till sidobordläggningen genom kraftiga vebbspant (cantilverkonstruktion) om inte däcken är försedda med stöttor (vilket är ogynnsamt ur lasthanteringsynpunkt).

I containerfartyg väljs ofta dubbel bordläggning. Detta ger en styvare konstruktion vilket kan vara nödvändigt eftersom däcket - pga de stora lucköppningarna - ger ett dåligt bidrag till sidokonstruktionens böjstyvhet. Plättjockleken i den övre delen av dubbla bordläggningen måste av samma skäl göras mycket grov (och längskepps-förstyvad) för att kravet på skrovbalkens böjmotstånd ska kunna uppfyllas.



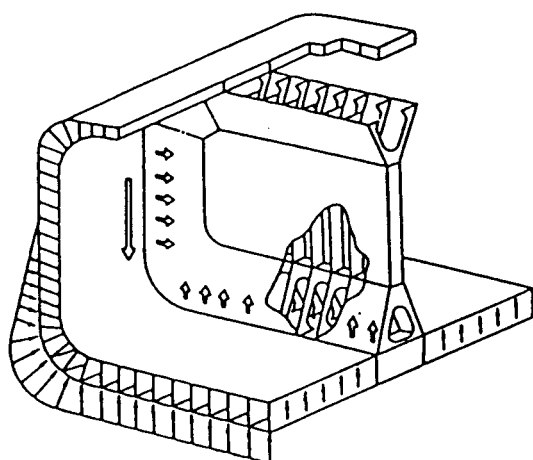
## Sidkonstruktionen

i bulkfartyg är till stor del integrerad i de triangulära topp- och botten sidotankarna (*hoppertanks*) som gör lasten självtrimmande och samtidigt utgör mycket böj- och vridstyva konstruktionselement mellan tvärskeppsskotten. Mellan tankarna kan bordläggningen vara enkel med vertikala spant, eller dubbel.



Stora tankfartyg har hittills byggts med enkel längskeppsförstyvad bordläggning och längskeppsskott. De primära styrkeförbanden i lastrummen utgörs av mycket kraftiga tvärskeppsgående vebbramar i vilka longitudinalerna är infästa.

Med de nya miljöskyddsreglerna som kräver dubbel bordläggning och segregerad ballast kommer man i mindre omfattning att behöva använda längskeppsskott för indelning av lastrummen i olika tankar, istället kommer den dubbla bordläggningen att användas som ballasttankar utefter hela fartygets längd.



**Fig. 1 Outline of hull structure and load transmission mechanism of EPOCH**

**Table 2 Comparison of performance between conventional ship and the EPOCH MARK II**

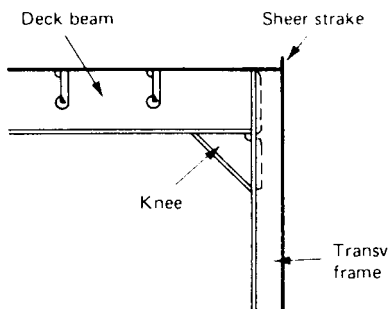
Item	Conventional	EPOCH MARK II
Tank configuration		
Cargo/Ballast segregation	★	★★★
Unloading efficiency	Unloading time	★
	Stripping	★★★
Cargo tank cleaning	Cleaning time	★
	Completeness	★★★
Gas free	Cargo tank	★
	Ballast tank	★★
Cargo tank heating	★	★★★
Cargo purity	★	★★★
Maintenance	Cargo tank coating	★
	Ballast tank coating	★
	Hull construction	★
Safety	Crack free	★★
	Stranding & collision	★

★★★ Excellent    ★★ Good    ★ Normal

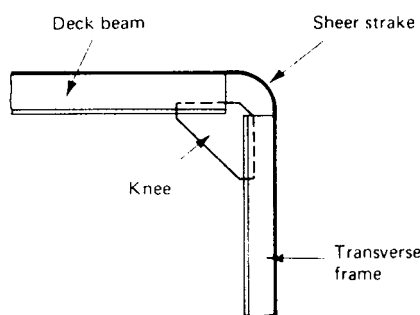
## Däckskonstruktioner

Stälarean i styrkedäcket bestäms i första hand av kravet på skrovbalkens längskeppsstyrka.

Däcket kommer att utsättas för de högsta längskeppsspänningarna och för stora fartyg är det nödvändigt att använda längskeppsförstyvningar, dels för att få så mycket effektivt längskeppsmaterial som möjligt, dels för att öka bucklingsstyrkan (kritiskt vid tryckspänningar). I fartygets ändar där det vertikala böjmomentet i skrovbalken är litet kan styrkedäcket göras tvärskeppsspantat.

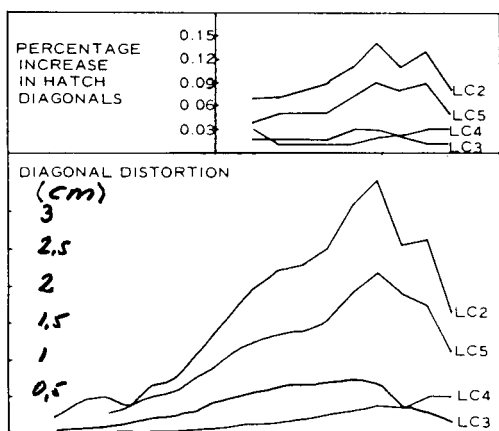


De största globala spänningarna i skrovet uppstår pga kombinerat vertikalt och horisontellt böjmoment i anslutningen mellan sidobordläggning och styrkedäck, det sk skärstraket. Plåten görs här lokalt grövre och av högre kvalitet för att förhindra sprickbildning.



Gunwale arrangements

De lokala lasterna på däckarna varierar beroende på vilken typ av fartyg det gäller. I Ro/Ro fartyg och konventionella torrlastfartyg måste däcksplåtarna i mellandäcken dimensioneras för att klara hjultrycken från truckar, i övrigt dimensioneras de för godsets masskrafter. Belastningarna på däckarna förs via däcksbalkar över till sidokonstruktionen och/eller via däcksvägar och lucksidokarmar till tvärskeppsskotten.



För containerfartyg där man har mycket stora lucköppningar uppstår speciella problem. Pga att större delen av skrovet är helt öppet blir det mycket torsionsvekt. När fartyget går i sned sjö utsätts det för globala vridmoment som leder till välvdeformationer av lucköppningarna. I anslutningen mellan den öppna lastlådan och slutna sektioner som maskinrum och förskepp uppstår höga välvspänningar i däck som överlagras längskeppsspänningarna.



Fig. 48 Hatch diagonal distortion



## Tvårskeppsskott

(*transverse bulkhead*)

Alla fartyg måste ha ett antal tvårskeppsskott. De viktigaste syftena med tvårskeppsskott är dels att tillförsäkra flytbarhet även efter en skada i något lastrum, dels att bibehålla skrovbalkens tvärsnittsförm. Tvårskeppsskotten utgör också inspänningar för alla längskeppsgående primära styrkeförband som därigenom för över sin last till skrovbalken.

Några olika typer av tvårskeppsskott:

Ship length in m	Engine room	
	Aft	Elsewhere
85 < L ≤ 105	4	5
105 < L ≤ 125	5	6
125 < L ≤ 145	6	7
145 < L ≤ 165	7	8
165 < L ≤ 190	8	9
190 < L ≤ 225	9	10
L > 225	specially considered	

Vattentäta skott är nödvändiga för fartygets säkerhet i händelse av läckage. Klassreglerna föreskriver ett minimiantal beroende av fartygets längd. Skotten dimensioneras för att klara en vattenfyllnad av lastrummet, men tillåts i ett sådant katastroffall få viss permanent deformation (spänningar upp till flytgränsen).

Tankskott är täta skott som dimensioneras på samma sätt som bordläggning och botten för att klara ett permanent hydrostatiskt tryck.

Styrkeskott har till huvuduppgift att bibehålla skrovets tvärsnittsförm. De behöver inte vara täta.

Skvalpskott installeras inuti stora tankar för att dämpa vätskerörelserna.

Kollisionsskott/Förpikskott måste finnas i alla fartyg för att begränsa läckaget vid en kollision. Skottet placeras 0,05 L - 0,08 L akter om FP.

Akterpikskott innesluter propellerhylsan i ett vattentätt utrymme.

Maskinrumsskott måste finnas både för och akter om maskinrummet. Dessa ska vara vattentäta och brandisolerade.

Egenperioden för en vätska i en tank:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi L}{g \tanh(\pi h / L)}}$$

där

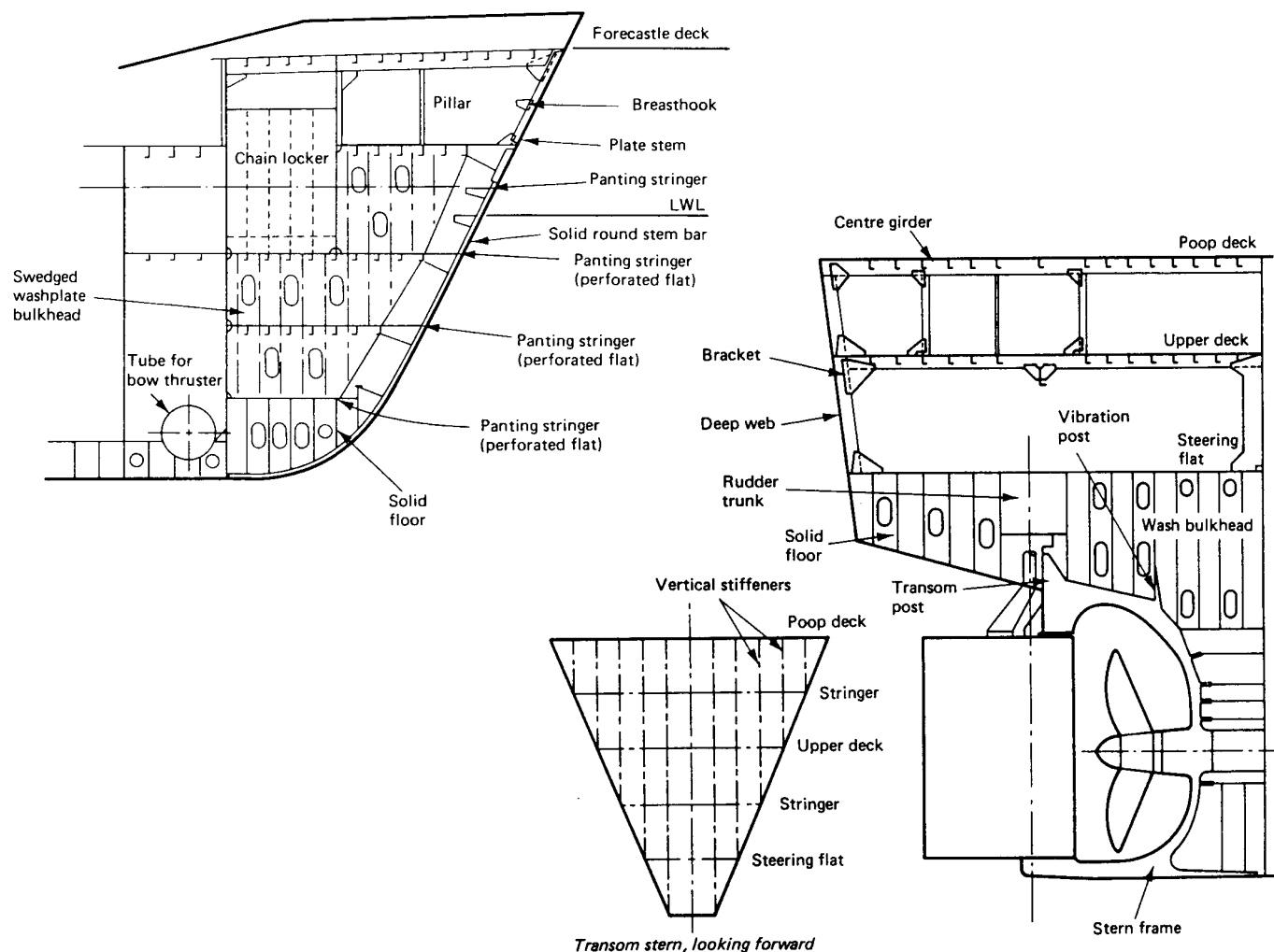
L = tanklängden i rörelseriktningen,  
h = vätskehöjden,  
bör ej sammanfalla med fartygets egenperiod i rullning eller stampning

## Förskepp och Akterskepp

Bordläggningen i förskeppet kommer att utsättas för stora lokala belastningsväxlingarna (*panting* = flämtning) pga vågor och fartygets rörelser och måste därför förstärkas med ökad plättjocklek och tätt placerade spant, bottenstockar, vägare och stringerplåtar.

Akterskeppet konstrueras i stor utsträckning med hänsyn till risken för vibrationer exciterade av propeller, lagerkrafter och maskineri. Strukturen måste här vara mycket styv och plåtfälten tätare avstivade än i lastrumsdelen av fartyget.

I maskinrummet höjs dubbelbotten och appliceras bottenstockar på varje spantdistans sammanbundna med kraftiga vägare under huvudmotor och trycklager.

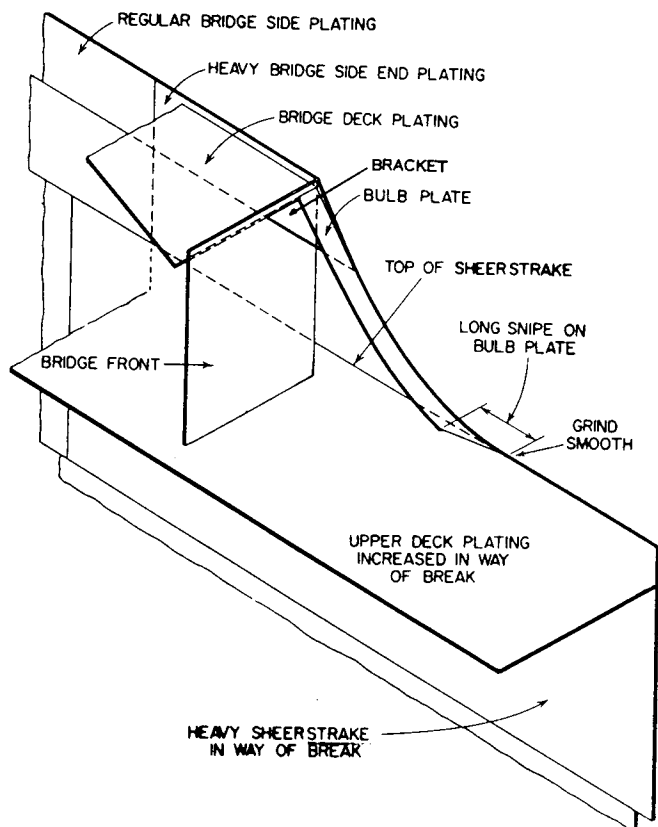
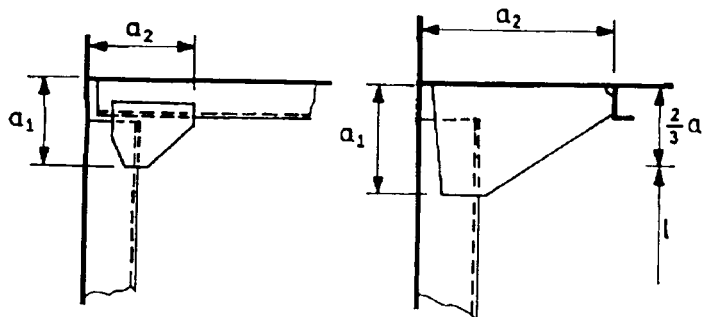
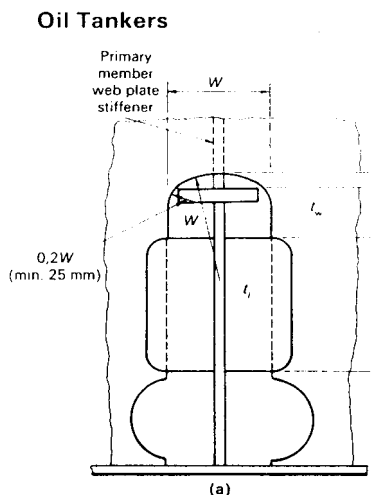


## Detaljkonstruktion

För att förhindra skador i fartygsskrovet är det minst lika viktigt att lägga ner möda på utförandet av detaljkonstruktionen som att dimensionera för att få acceptabla nominella späningsnivåer i styrkeförbanden.

Exempel på viktiga överväganden som måste göras vid detaljkonstruktionen:

Alla bärande förband (primära och sekundära) måste ha kontinuitet i strukturen. Där förbanden avslutas och där last överförs till andra förband ska övergången ske succesivt.



Spänningskoncentrationer vid hörn, bricktår, hål, notchar etc skall hållas så låga som möjligt genom mjuka geometrier och ev lokala förstärkningar. Den helt övervägande delen av skador i fartygsskrov beror på utmattning. Alla utmattningssprickor initieras vid svetsförband och vid lokala spänningskoncentrationer!

Detaljkonstruktionen ska utföras så att den går att svetsa med hög kvalitet, korrosionsskyddas, rengöras och inspekteras (åtkomlighet).

## Belastningstyper

Avgörande för fartygsskrovets dimensionering är de belastningar det kommer att utsättas för under sin livstid.

Belastningarna kan delas upp i följande huvudtyper:

Statiska laster

Dynamiska laster

Globala laster

Lokala laster

Effekten av belastningarna i form av spänningar i konstruktionselementen är av samma storleksordning för de olika typerna och man måste ta hänsyn till den sammanlagda effekten av dem för att kunna bedömma fartygets styrka. Det som ytterligare komplicerar dimensioneringsarbetet är att de olika belastningarna varierar med olika frekvens och deras nivåer och samverkan inte exakt kan förutses på konstruktionsstadiet utan kommer att bli beroende på vilket sätt fartyget används och vilka farvatten det kommer att trafikera.

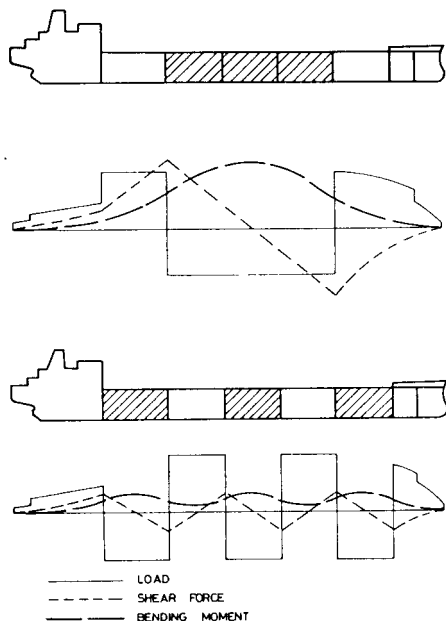
De förutbestämda (deterministiska) lastfall som används för dimensionering är alltså mera att betrakta som normgivande - dvs ger fartyg med "acceptabel" säkerhetsnivå under "normalt" handhavande - än som den faktiska fysikaliska verklighet det enskilda fartyget kommer att utsättas för.

Det senaste decenniet har man ägnat mycken forskning åt att utveckla probabilistiska dimensioneringsmetoder där man direkt tar hänsyn till sannolikhetsfördelningarna för de olika belastningarna och för styrkan i strukturen för att kunna fastställa risken för kollaps. Dessa metoder kan framför allt vara värdefulla vid utvecklandet av nya konstruktionslösningar där man inte har erfarenhet från fartyg i drift.

## Lugnvattenbelastningar

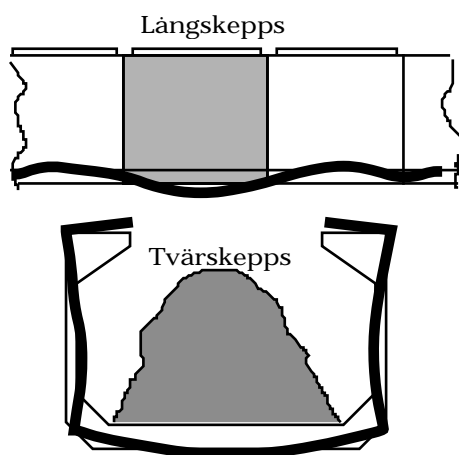
(*still water loads*) benämns de statiska laster som uppstår på skrovbalken och på lokala styrkeförband pga det hydrostatiska trycket under vattenlinjen och pga lastens fördelning i skrovet. Dessa laster är till viss del möjliga att begränsa genom restriktioner på tillåtna lastfall (föreskrivs i fartygets *loading manual*)

### Globala



Pga skillnader i fartygets massfördelning och displacementsfördelning (spantarea-kurvan) uppstår böjmoment och tvärkrafter i skrovbalken. Om tyngden från fartyg och last är större än displacementet mitt i fartyget talar man om "*sagging*"belastning (tryckspänningar i däcket, dragspänningar i botten). I det omvända fallet, om displacementet överväger tyngden midskepps kallas belastningen "*hogging*" (dragspänningar i däcket, tryckspänningar i botten). Tex ett slankt containerfartyg med däckshuset midskepps är ett typiskt hoggingfartyg.

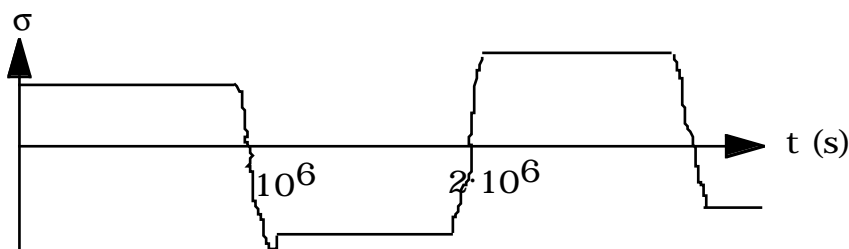
### Lokala



Lokalt ger lastfördelningen upphov till deformationer och spänningar i primära och sekundära styrkeförband. De lokala längskeppsspänningarna överlagras direkt på de globala.

Lugnvattenbelastningarna varierar med fartygets lastnings/lossnings-cykler dvs normalt i storleksordningen  $10^2 - 10^3$  cykler under ett fartygs livstid.

### Frekvens



## Våginducerade belastningar (1:a ordningen)

är dynamiska laster som uppstår i samspelet mellan fartyg och vågor. De kan delas upp i:

Variationer i yttre (dynamiskt) vattentryck pga vågrörelser och fartygets rörelser

Masskrafter från fartyg och last pga rörelser och accelerationer

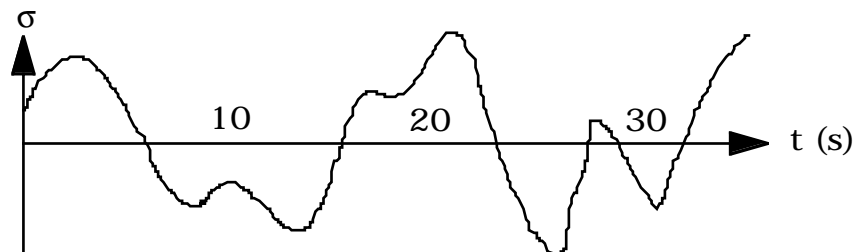


De ger på samma sätt som lugnvattenlasterna upphov till globala (vertikala och horisontella böjmoment och tvärkrafter samt torsionsmoment i skrovbalken) och lokala belastningar på fartygsskrovet.

Skillnaden består i att de våginducerade belastningarna i ett givet sjötilstånd är stokastiska både till sitt belopp i en given punkt och till sin fördelning utefter skrovet. Effekten av de två komponenterna ovan kan inte heller direkt superponeras eftersom de uppträder med olika fasförskjutning och frekvens.

## Frekvens

1:a ordningens vågbelastningar kallas här de belastningar som uppträder med ungefär samma frekvens som vågmedelfrekvensen dvs i storleksordningen 0,1-0,2 Hz. Man brukar räkna med  $10^8$  vågbelastningar (vågmöten) under ett fartygs livstid.



Frekvensen är tillräckligt låg för att lastväxlingarna ska kunna betraktas som kvasi-statiska dvs betydligt lägre än egensvängningsfrekvensen för strukturen.

## Våginducerade belastningar (högre ordning)

Dynamiska laster av transient karaktär som uppstår i samspelet mellan fartyg och vågor.

Exempel: Bottenslag (slamming)  
Bogslag  
Skvalp i slacka tankar (sloshing)

De ger upphov till höga kortvariga belastningar lokalt i strukturen men kan också ge upphov till avtonande vibrationer i skrovbalken (*whipping*).

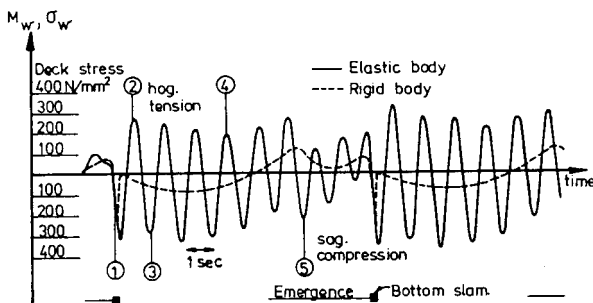


Figure 4.30 Time history of bending moment at midships; tanker in ballast.

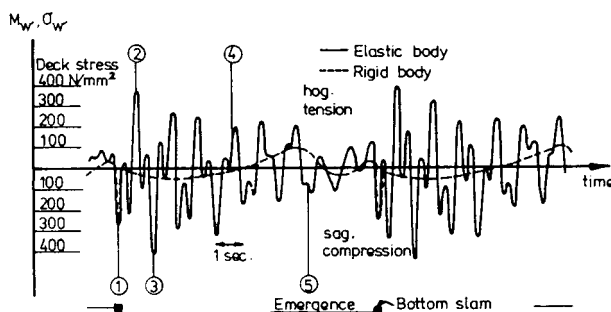


Figure 4.31 Time history of bending moment at station 7 1/2; tanker in ballast.

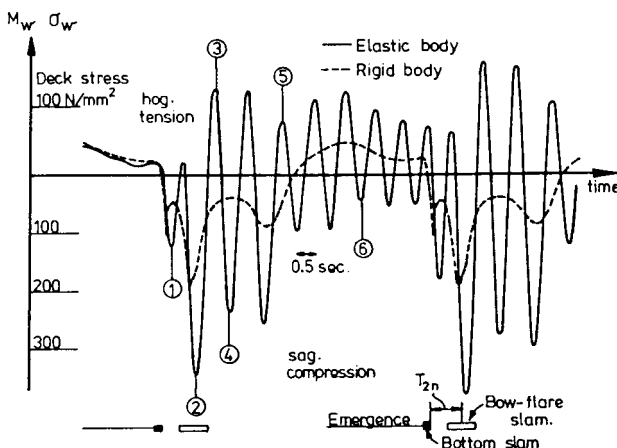


Figure 4.32 Time history of bending moment at midships; containership,  $F_n = 0.261$ .

Eftersom spänningsväxlingarna sker med relativt hög frekvens (1-2 Hz) kan de betraktas separat som överlagrade på 1:a ordningens våginducerade spänningar.

De transienta belastningarna och deras effekt på strukturen är mycket komplicerade att beräkna. De kan i stor utsträckning begränsas genom gott handhavande av fartyget, tex minskad fart eller ändrad kurs i hårt väder (*heavy weather manoeuvring*).

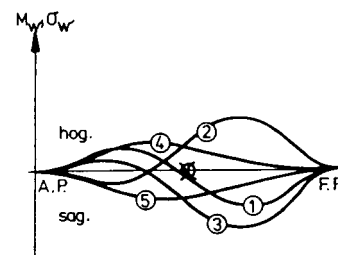


Figure 4.33 Longitudinal distribution of bending moment; tanker in ballast.

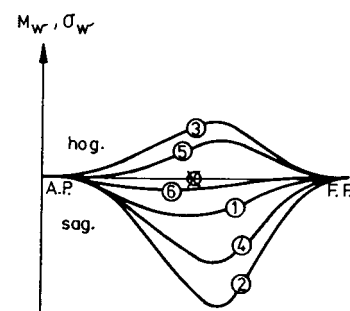


Figure 4.34 Longitudinal distribution of bending moment; containership.

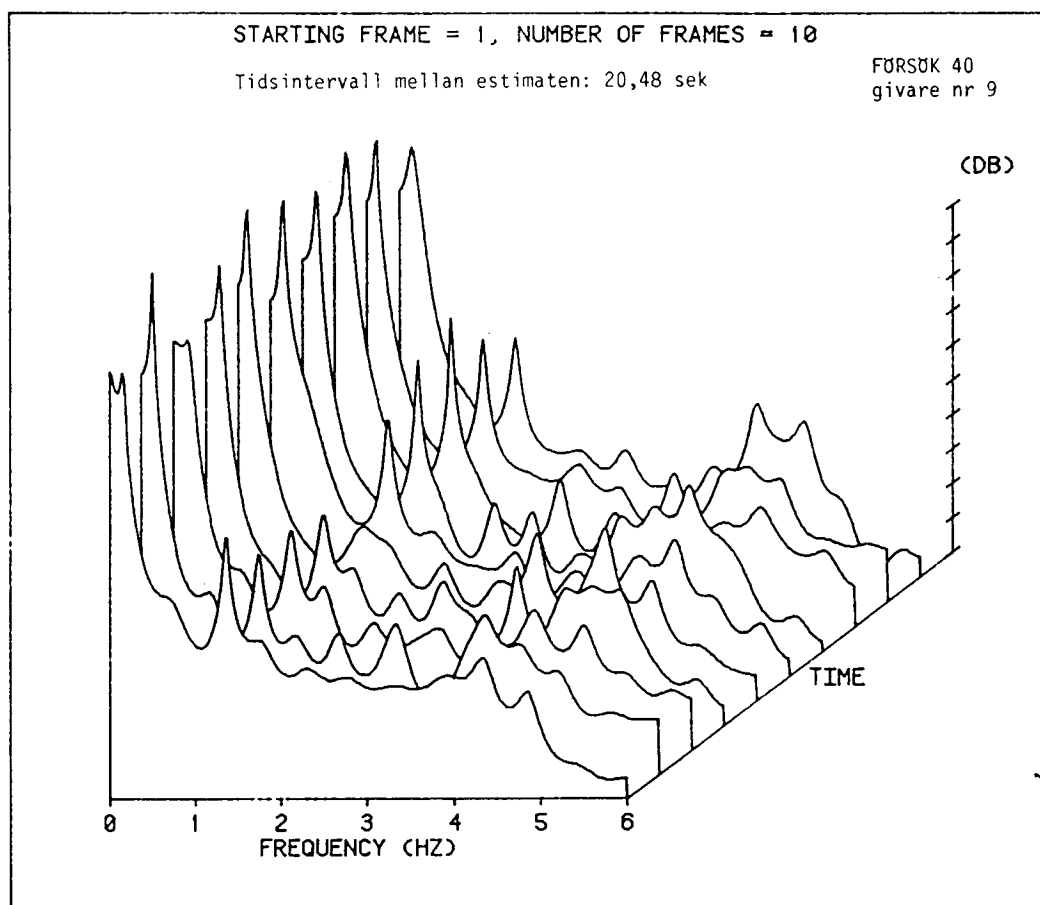
## Skrovvibrationer från maskineri och propeller

Dynamiska laster av hög frekvens och av stationär karaktär  
( $10^9$  -  $10^{10}$  cykler under ett fartygs livstid).

De ger upphov till globala skrovsvängningar (av olika ordningar) och till lokala vibrationer i fundament och paneler nära störningskällan.

Globala stationära svängningar måste med hänsyn till komfort och gods hållas på en låg nivå. De ger därför sällan något betydelsefullt bidrag till den totala spänningsbilden.

Lokalt kan däremot spänningar från strukturvibrationer väsentligt bidra till uppkomsten av utmattningsskador. Vibrationer förhindras genom att man redan på konstruktionsstadiet försäkras sig om att störningskällornas frekvens och egenfrekvensen i strukturen inte sammanfaller.



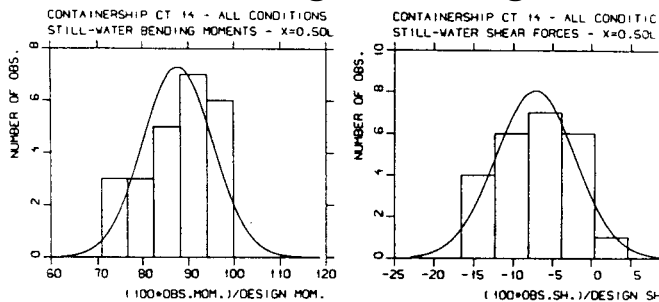


## Sammanfattning av egenskaper hos olika belastningstyper

### 1 Lugnvattenbelastningar

Deterministiskt bestämbara av varje lastkondition, men "stokastiska" över fartygets livstid.

Oberoende av övriga belastningar.

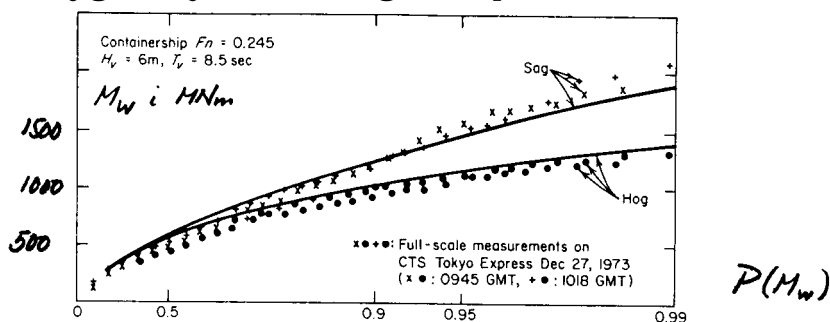


### 2 Våginducerade belastningar

Stokastiska både över kort och lång tid.

Endast i viss grad påverkbara (*weather routing*).

Beroende av 1 eftersom lastfördelningen även påverkar fartygets dynamiska egenskaper.



### 3 Transienta våglaster

Kan approximativt bestämmas "deterministiskt" ur 2 (stokastisk).

I hög grad påverkbara genom beslut ombord.

Beroende av 2 (och 1).

### 4 Vibrationer

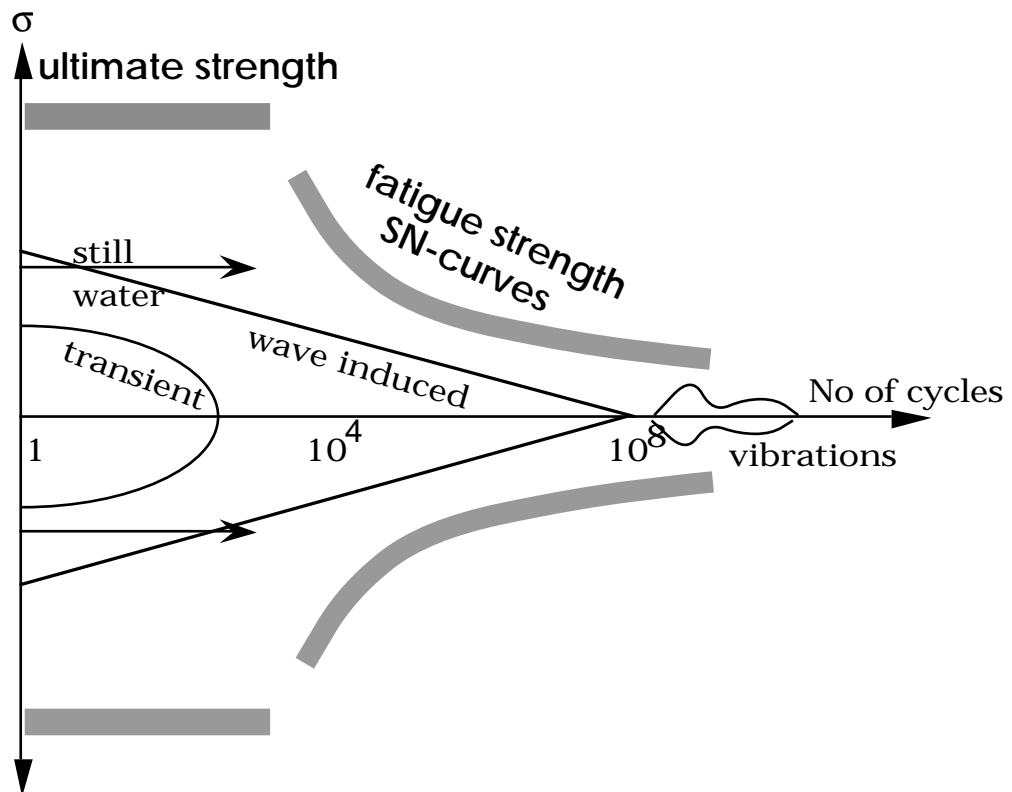
Deterministiskt bestämbara.

Påverkbara genom goda konstruktionslösningar men även genom åtgärder på befintliga konstruktioner.

Oberoende av 1-3.

På grund av att de olika typerna av belastningar uppträder med helt olika frekvenser kan de vanligen betraktas separat, och deras verkan på strukturen kan (i det linjära området) superponeras

## Hållfasthetskriterier för fartygsskrov



## Kollaps (buckling, plasticering, sprödbrott)

inträffar när spänningsnivån (töjningen) överskrider materialets hållfasthet. Det kan ske pga en försvagad struktur (korrosion, utmattningssprickor) och/eller alltför höga belastningar. För skrovbalken bestäms dessa av maximal lugnvattenbelastning kombinerat med maximal våginducerad belastning. För lokala förband kan även transienta belastningar bli avgörande.

Kollaps av hela skrovbalken föregås av att enskilda paneler och bärande förband i däck eller botten genomplasticeras eller bucklar och tappar styrka varvid lastupptagningen omfördelas till skrovsidor och längskeppskott. Normalt finns en stor säkerhetsmarginal (redundans) från det att enskilda element kollapsar tills hela fartyget bryts sönder.

## Utmattning

är i huvudsak bestämt av de våginducerade belastningarna ( $10^3 - 10^5$  cykler), samt lokala spänningskoncentrationer i strukturen. Utmattningssprickor behöver inte leda till kollaps, ofta upptäcks de vid besiktning och kan repareras. Kostnaderna för reparation av dåligt utförda detaljkonstruktioner kan däremot bli mycket stora.

## Beräkningsrutiner idag - Globala belastningar Lugnvatten

De statiska skrovbalkslasterna är enkla att beräkna när fartygets egenvikt, lastfördelning, flytläge och tillhörande displacementfördelning är känd. För dimensionering väljer man det förväntade lastfall som ger värsta belastningarna. Dessa får sedan inte överskridas när fartyget tagits i drift.

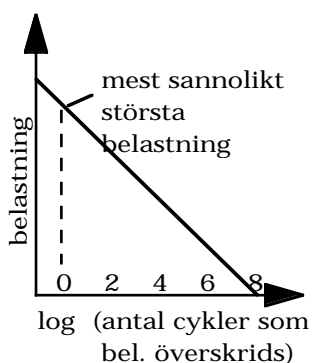
I fartygets lastfallsbok finns angivet böjmoment och tvärkraftfördelningar för olika lastfall. De flesta stora fartyg är också utrustade med en lastdator som direkt redovisar aktuella lugnvattenbelastningar även under lastning och lossning och som varnar då man överskrider tillåtna värden (viktigt för tankfartyg!).

## Våginducerade

Belastningarna på skrovbalken i regelbundna vågor kan med relativt god noggrannhet beräknas numeriskt med sk "strip-teori".

Genom att betrakta ett oregelbundet vågsystem som sammansatt av ett stort antal regelbundna vågor med olika amplitud och frekvens och långsamt men slumpmässigt varierande fasvinklar (vågspektrum) kan man genom att linjärt superponera belastningsbidragen från varje vågkomponent bilda ett belastningsspektrum ur vilket man kan beräkna sannolikhetsfördelningen för belastningarna i det aktuella vågsystemet (korttidsfördelning).

Långtidsfördelning  
av vägbelastningar



Design våginducerat böjmoment (kNm) enl. IACS

hogging:  $M_w = 0,19CL^2BC_b$

sagging:  $M_w = -0,11CL^2B(C_b+0,7)$

med

$C = 10,75 - ((300-L)/100)^{1,5}$   
för  $90 < L < 300\text{m}$

Ur vägstatistik över världshaven kan man vidare få data om sannolikheten för olika vågsystem över lång tid. Detta ligger till grund för beräkning av långtidsfördelningen av belastningarna. Sannolikhetsfördelningen följer nära en exponential-fördelning (Weibull-fördelning).

De stora klassificeringssällskapen har 1991 enats inom IACS om att föreskriva ett standardiserat maximalt dimensionerande vertikalt våginducerat böjmoment kring midskepps uttryckt som funktion av fartygets huvuddimensioner. Som utgångspunkt för detta ligger just systematiska datorberäkningar på olika fartyg och för olika sjötilstånd.

## Beräkningsrutiner idag Lokala statiska och dynamiska belastningar

simuleras i dagens beräkningsrutiner genom statiska "typlastfall". Svagheten med denna förenkling är ffa att fördelningen av dimensionerande spänningsnivåer blir direkt beroende av typfallens belastningsfördelning. Typfall kan därför bara användas i kombination med empiriska värderingar från skadestatistik etc.

För helt nya konstruktionslösningar kan det vara svårt att förutse vilka typfall som återspeglar den verkliga maximala belastningen i en given punkt. Vidare ger typfallen ingen information om belastningshistorien som är avgörande för utmattningsdimensionering.

## Exempel

### Dimensionerande typlastfall för ett torrlastfartygs tvärskeppsstyrka

#### LEGEND :

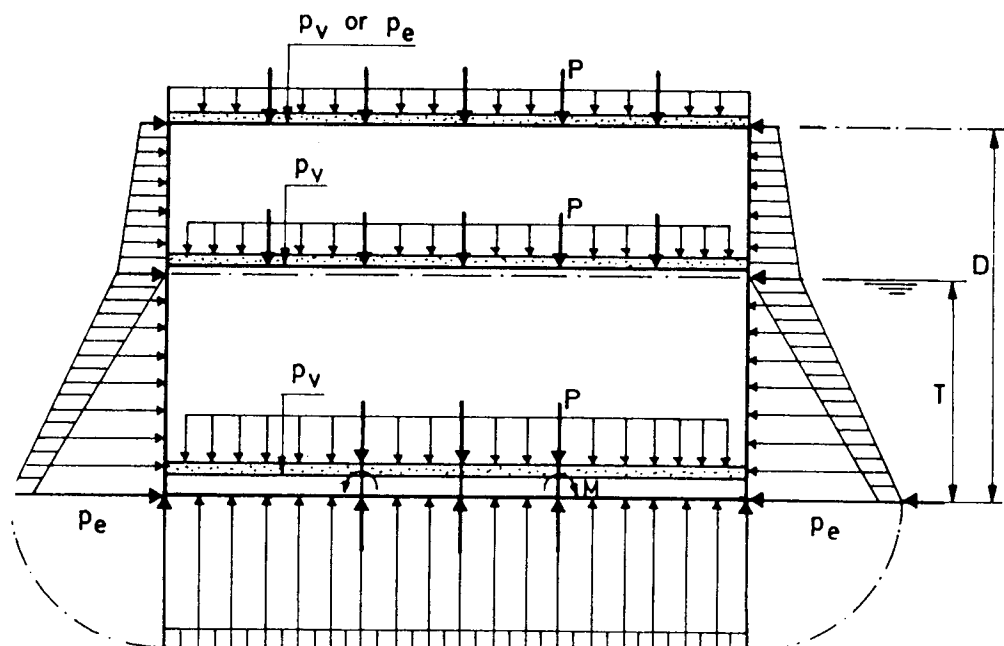
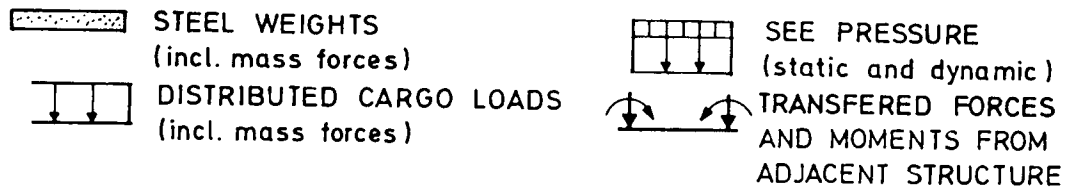


Fig. 2.1 Load condition LC1

## Lugnvattenpåkänningar i skrovbalken

Principskiss ur SSD. Observera att teckenkonventionen för snittkrafter och snittmoment är omvänd den vi är vana att använda (och som används av DnV).

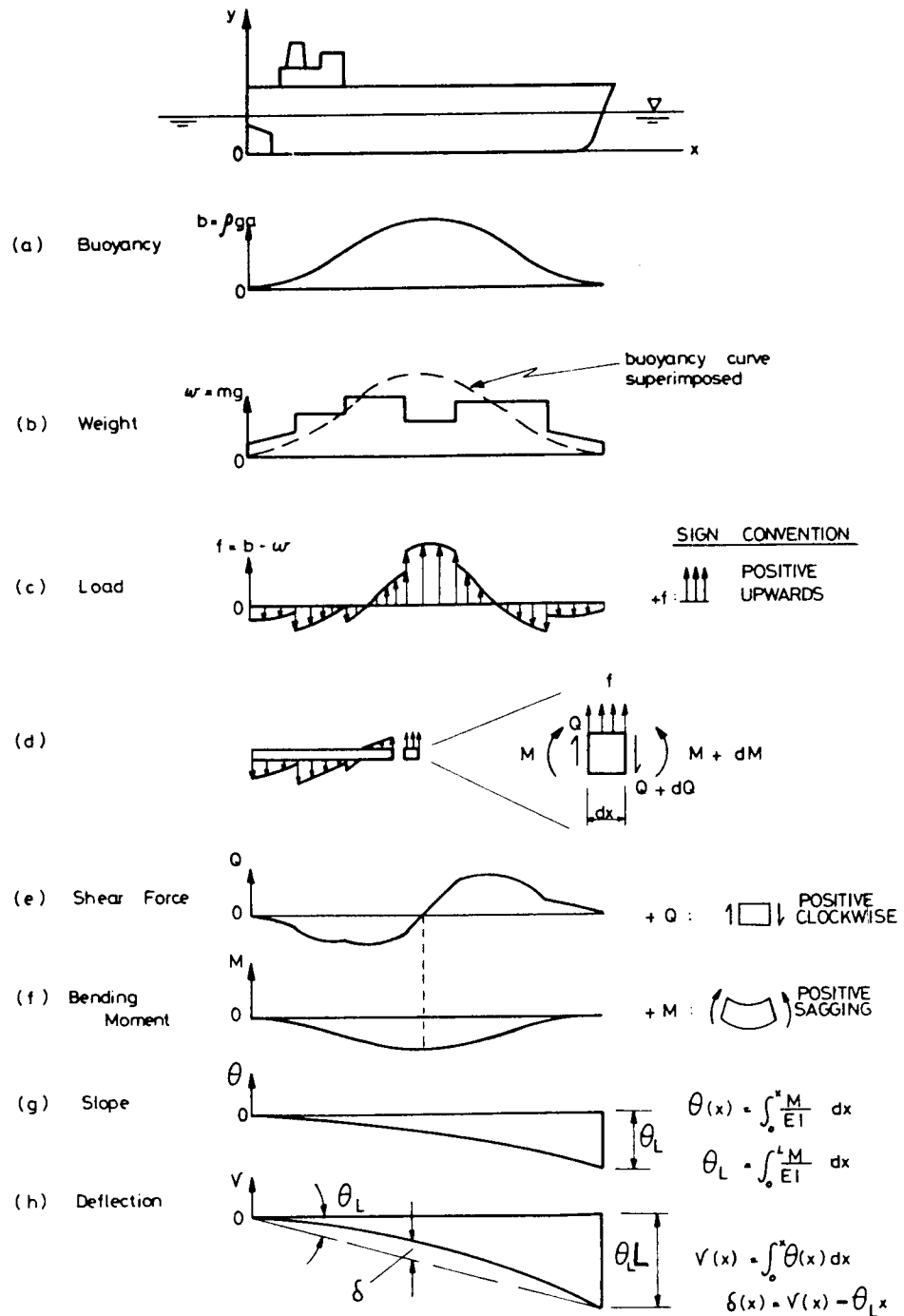
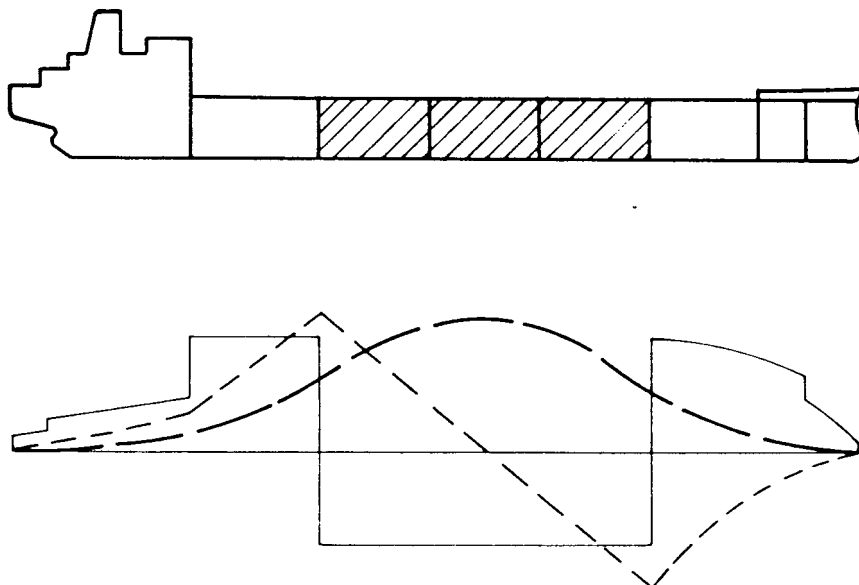


Figure 3.1 Summary of hull girder bending

## Lastfördelningens betydelse

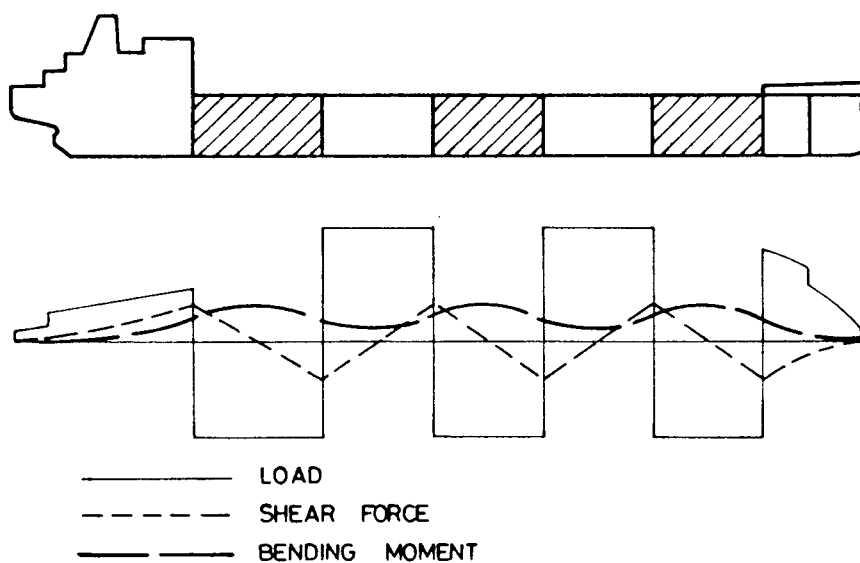
### Ojämt placerad last utefter skrovets längd.

Ger upphov till stora påkänningar i skrovbalken.  
I praktiken är det orealistiskt att dimensionera för  
alla tänkbara lastfall. Godkända lastfall återges i  
fartygets trim- och stabilitetsbok, (*loading manual*).



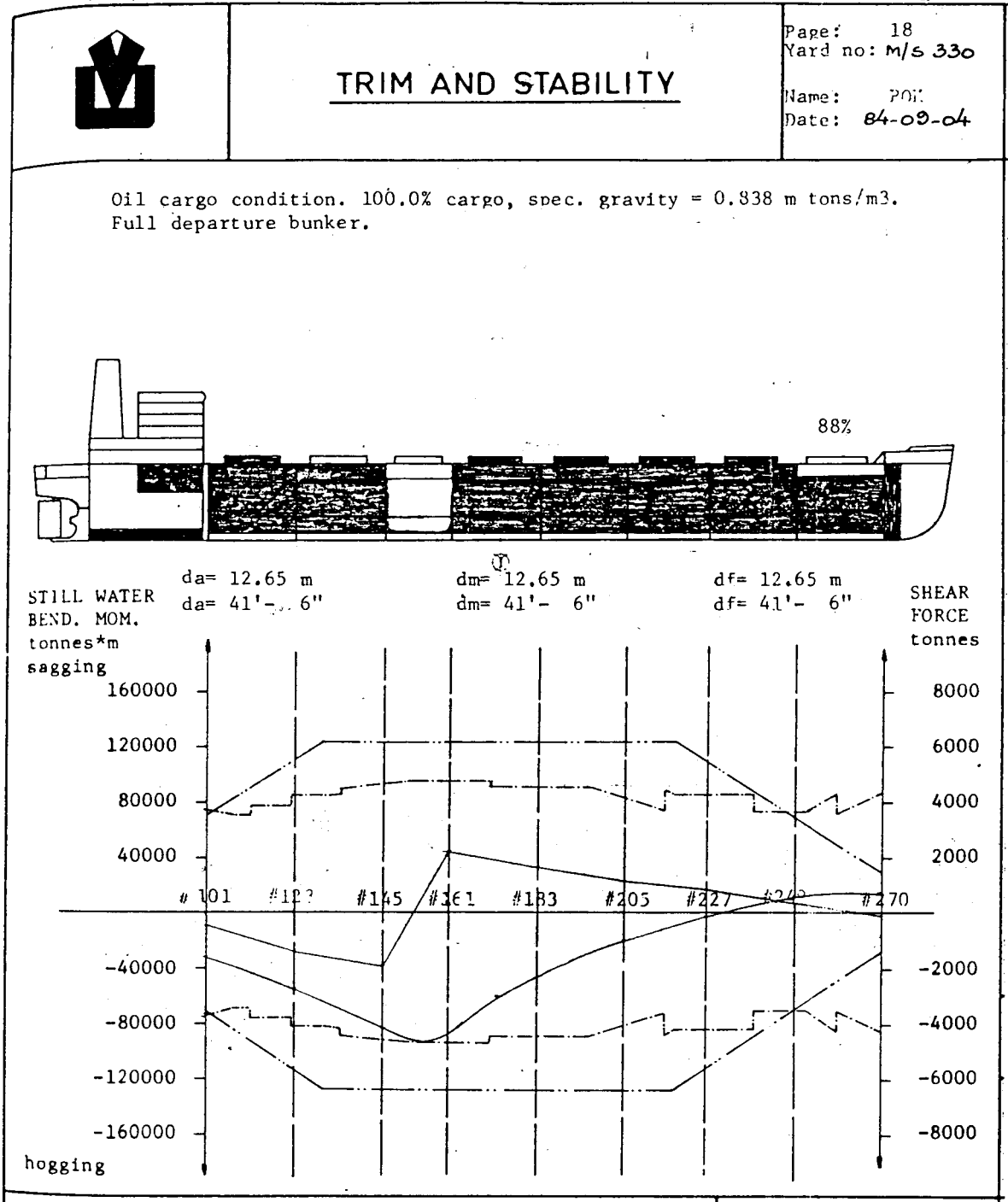
### Fördelad last

Sänker de globala påkänningarna, men inte nöd-  
vändigtvis de lokala påkänningarna i primära styrke-  
förband tvärskepps och längskepps.



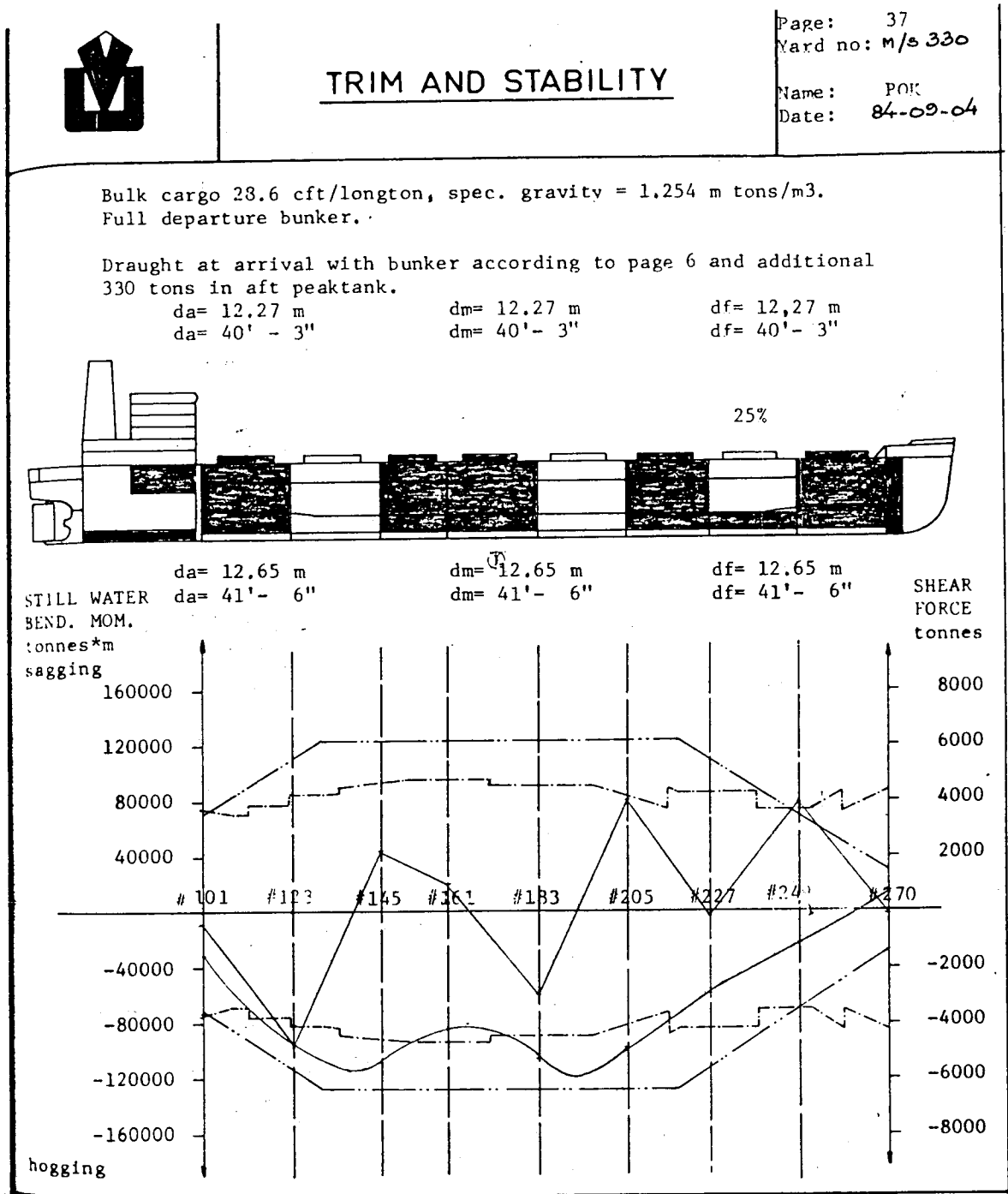
### Exempel ur lastfallsboken för ett OBO-fartyg

Fullastkondition med olja jämt fördelad i alla lasttankar utom Lastrum 6 för segregerad ballast som är tomt



## Exempel ur lastfallsboken för ett OBO-fartyg

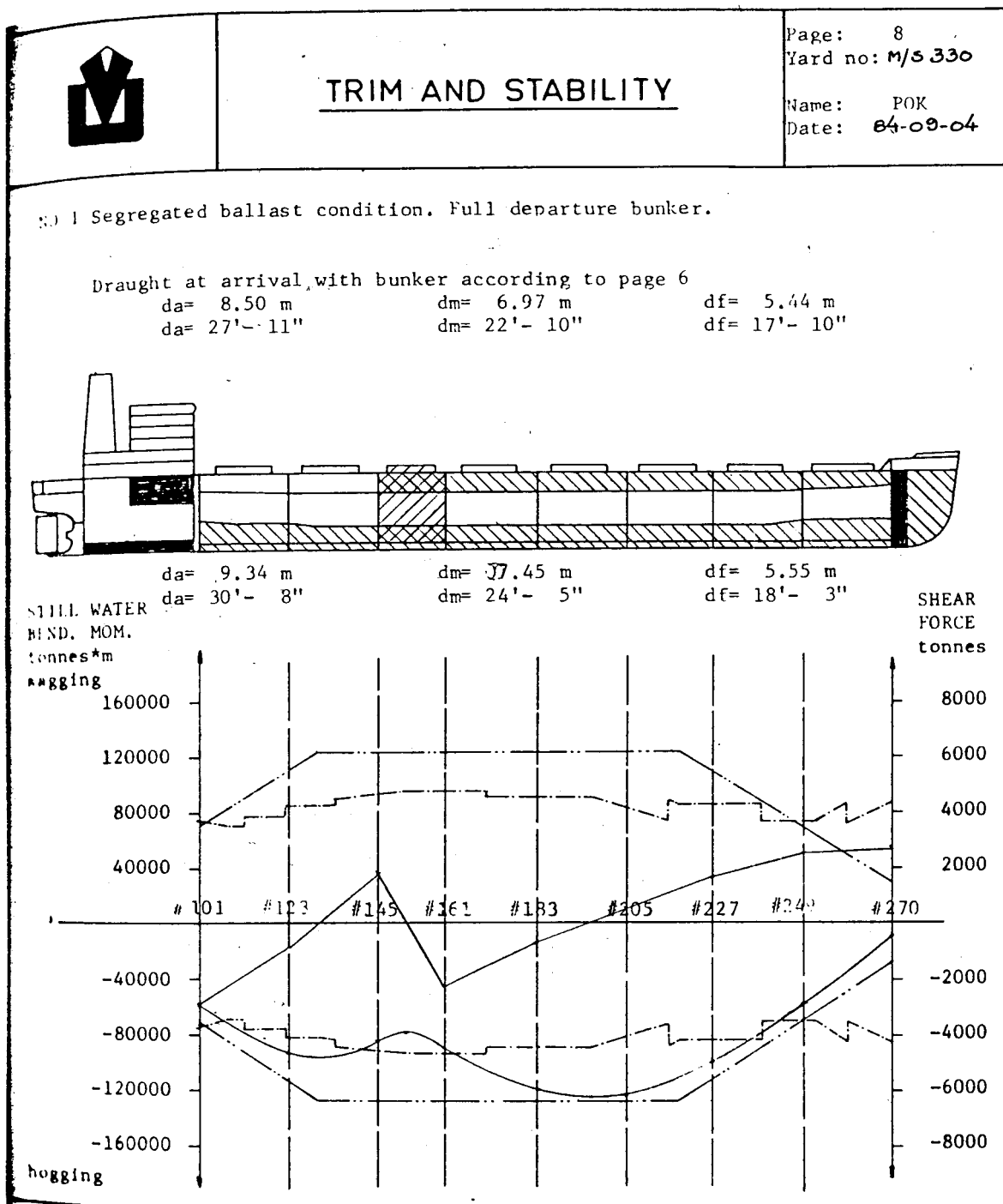
Fullastkondition med bulklast,  
Lastrum 4 och 7 helt tomma, 25% i lastrum 2





## Exempel ur lastfallsboken för ett OBO-fartyg

Segregerad ballastkondition,  
Ballast i lastrum 6 samt i vingtankar



## Beräkning av midskeppssektionens böjmotstånd (*section modulus*)

Preliminära dimensioner för botten och sidor och däck bestäms ur lokala hållfasthetskrav (lateralt tryck) med hjälp av klassreglernas minimikrav. Därefter kontrolleras böjmotståndet. Detta blir ofta inte tillräckligt med de preliminära dimensionerna, utan ytterligare stål måste tillföras sektionen. För att det så effektivt som möjligt ska medverka till böjmotståndet bör det förläggas i anslutning till övre styrkedäcket (t ex genom ökad plåt-tjocklek och kraftiga förstävningar).

TABLE 3.5 SECTION MODULUS CALCULATION

Item	Scantlings m × mm	Area a (m <sup>2</sup> )	Height h (m)	Moment ah	2nd Moment ah <sup>2</sup>	Local 2nd Moment i (m <sup>4</sup> )
Strength Deck Plating	2.5 × 14	0.0350	9.0	0.3150	2.835	
S.D. stringer plate	1.5 × 16	0.0240	9.0	0.2160	1.944	
S.D. longitudinals (mm)	W160 × 14; F40 × 14	0.0084	8.9	0.0748	0.666	
Sheer strake	1.0 × 16	0.0160	8.5	0.1360	1.156	0.001
Side plating	7.2 × 14	0.1008	4.4	0.4435	1.951	0.435
2nd deck plating	4.0 × 12	0.0480	5.5	0.2640	1.452	
Bilge (curved portion)	R = 0.8; t = 14	0.0176	0.29	0.0051	0.001	0.001
Inner Bottom plating	6.5 × 14	0.0910	1.0	0.0910	0.091	
I.B. margin plate	1.5 × 16	0.0240	1.0	0.0240	0.024	
I.B. longitudinals (mm)	W200 × 10; F66 × 15	0.0150	0.86	0.0129	0.011	
Side girders	1.0 × 12	0.0240	0.5	0.0120	0.006	0.002
Center girder (½)	1.0 × 6	0.0060	0.5	0.0030	0.001	0.001
Bottom plating	7.2 × 14	0.1008	0	0	0	
Bottom longitudinals (mm)	W200 × 10; F66 × 15	0.0150	0.14	0.0021	0.000	
Upper hatch side girder	W0.5 × 25; F0.4 × 25	0.0225	8.64	0.1944	1.680	
Lower hatch side girder	W0.5 × 25; F0.4 × 25	0.0225	5.14	0.1157	0.595	
Totals (for half section)		0.5706		1.9095	12.413	0.440

$$\text{Height of neutral axis: } h_{NA} = \frac{\sum a_i h_i}{\sum a_i} = \frac{1.9095}{0.5706} = 3.346 \text{ m}$$

$$\frac{1}{2} I_n = 12.413 + 0.440 = 12.853 \text{ m}^4$$

$$\text{Parallel axis term} = -(\sum a_i) h_{NA}^2 = -6.390 \text{ m}^4$$

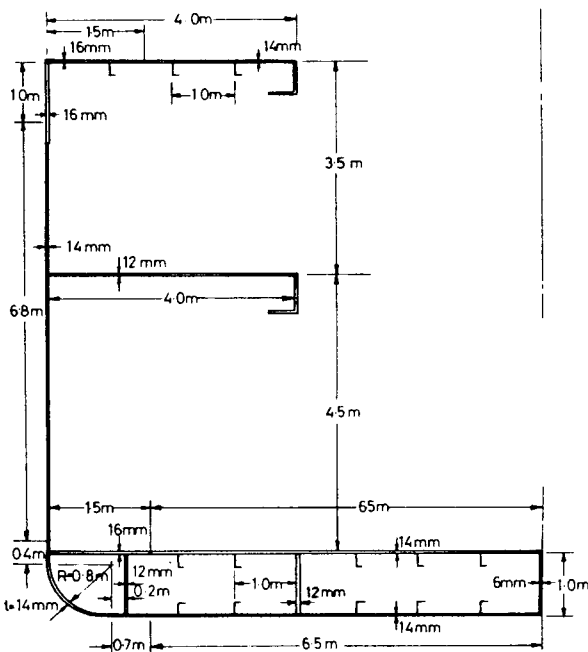
$$\frac{1}{2} I = 6.463 \text{ m}^4$$

$$\text{Full values: } A = 1.142 \text{ m}^2$$

$$I = 12.93 \text{ m}^4$$

$$Z_D = \frac{I}{h_D - h_{NA}} = \frac{12.93}{9.000 - 3.346} = 2.287 \text{ m}^3$$

$$Z_A = \frac{I}{h_{NA}} = \frac{12.93}{3.346} = 3.864 \text{ m}^3$$



bilge plating (curved portion):

inclined plating:

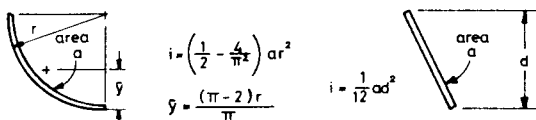
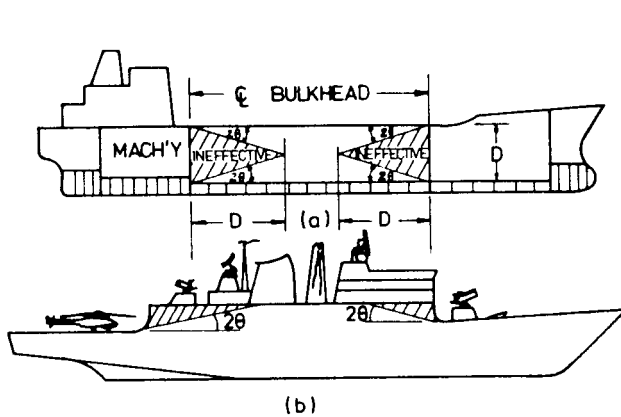


Figure 3.15 Example of longitudinally effective material.

## Krav på medverkande material i skrovbalkens böjmotstånd

- 1 Tillräcklig längskeppsutsträckning
- 2 Skjuvöverförande infästning (uppfyllt vid svetsning!)
- 3 Ska medfölja skrovbalkens deformation  
(kräver understöttning av däckshus, däckstrimlor etc)



NOTE:  
in all cases  
 $\theta = \tan^{-1} \frac{1}{4}$

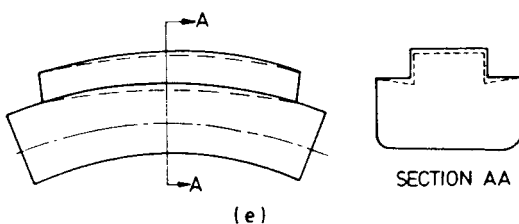
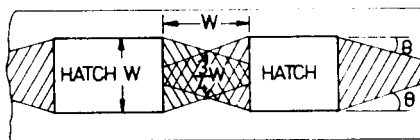
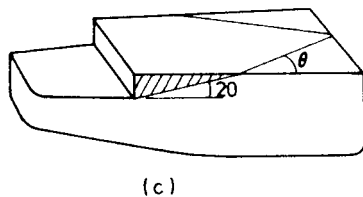
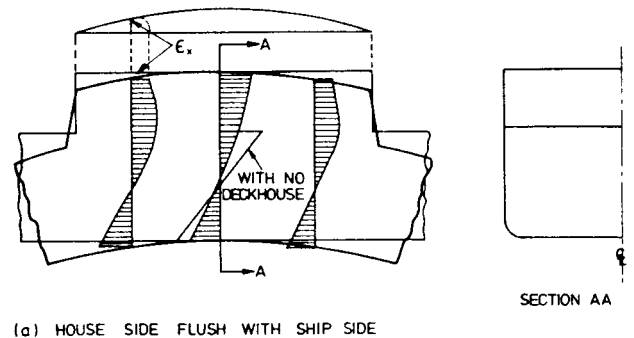
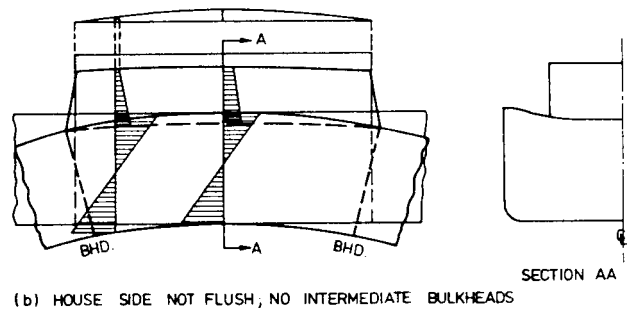


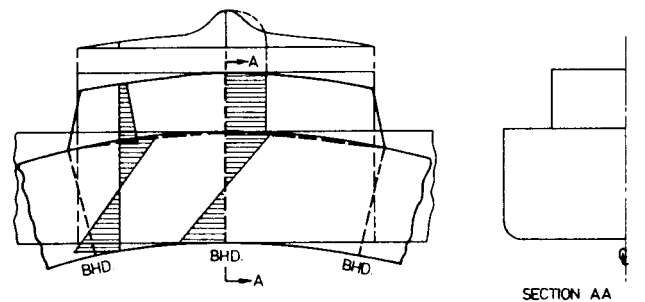
Figure 3.14 Effective longitudinal material.



(a) HOUSE SIDE FLUSH WITH SHIP SIDE



(b) HOUSE SIDE NOT FLUSH; NO INTERMEDIATE BULKHEADS



(c) HOUSE SIDE NOT FLUSH; ONE INTERMEDIATE BULKHEAD

Figure 3.40 Interaction between hull and deckhouse.

Steel Ships Pt.3 Ch.1 Sec.5

### C. Bending Strength and Stiffness.

#### C 100 Midship section particulars.

101 When calculating the moment of inertia and section modulae, the effective sectional area of continuous longitudinal strength members is in general the net area after deduction for openings as given in E.

The effective sectional area of strength members between hatch openings in ships with twin or triple hatchways is to be taken as the net area multiplied by a factor 0,6 unless a higher factor is justified by direct calculations. Superstructures which do not form a strength deck, are not to be included in the net section. This applies also to deck-houses, bulwarks and non-continuous hatch side coamings. For definition of strength deck, see Sec.1 B203.

103 Continuous trunks, longitudinal hatch coamings and above deck longitudinal girders are to be included in the longitudinal sectional area provided they are effectively supported by longitudinal bulkheads or deep girders.

104 The main strength members included in the hull section modulus calculation are to extend continuously through the cargo region and sufficiently far towards the ends of the ship.

105 Longitudinal bulkheads are to terminate at an effective transverse bulkhead, and large transition brackets are to be fitted in line with the longitudinal bulkheads.

## Klassreglernas krav på skrovbalkens skjuvhållfasthet (ex ur DnV)

**103** The design stillwater bending moments amidships (sagging and hogging) are normally not to be taken less than:

$$M_S = M_{SO} \quad (\text{kNm})$$

$$M_{SO} = -0,065 C_{WU} L^2 B (C_B + 0,7) \quad (\text{kNm}) \text{ in sagging}$$

$$= C_{WU} L^2 B (0,1225 - 0,015 C_B) \quad (\text{kNm}) \text{ in hogging}$$

$C_{WU} = C_W$  for unrestricted service.

Larger values of  $M_{SO}$  based on cargo and ballast conditions are to be applied when relevant, see 102.

For ships with arrangement giving small possibilities for variation of the distribution of cargo and ballast,  $M_{SO}$  may be dispensed with as design basis.

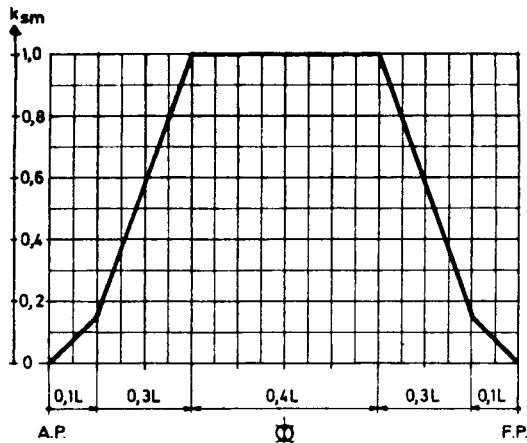


Fig. 2 Stillwater bending moment.

### B 200 Wave load conditions.

**201** The Rule vertical wave bending moments amidships are given by:

$$M_W = M_{WO} \quad (\text{kNm})$$

$$M_{WO} = -0,11 C_W L^2 B (C_B + 0,7) \quad (\text{kNm}) \text{ in sagging}$$

$$= 0,19 C_W L^2 B C_B \quad (\text{kNm}) \text{ in hogging}$$

$C_W$  need not be taken greater than  $D/1,4$ .  
 $C_B$  is not be taken less than 0,6.

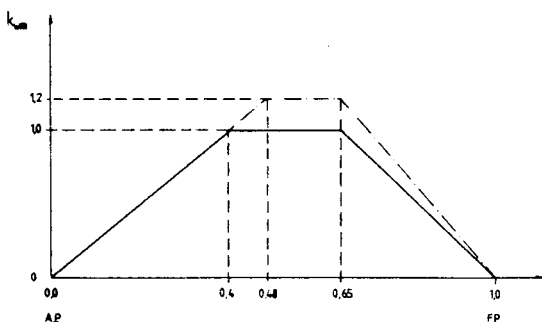


Fig. 3 Wave bending moment distribution.

$$Z_0 = \frac{C_{W0}}{f_1} L^2 B (C_B + 0,7) \quad (\text{cm}^3)$$

$$C_{W0} = 10,75 - [(300-L)/100]^{3/2} \text{ for } L < 300$$

$$= 10,75 \text{ for } 300 \leq L \leq 350$$

$$= 10,75 - [(L-350)/150]^{3/2} \text{ for } L > 350$$

Values of  $C_{W0}$  are also given in Table C1.

$C_B$  is in this case not to be taken less than 0,50.

Table C1 Values for $C_{W0}$ .					
L	$C_{W0}$	L	$C_{W0}$	L	$C_{W0}$
		160	9,09	260	10,50
		170	9,27	280	10,66
		180	9,44	300	10,75
		190	9,60	350	10,75
100	7,92	200	9,75	370	10,70
110	8,14	210	9,90	390	10,61
120	8,34	220	10,03	410	10,50
130	8,53	230	10,16	440	10,29
140	8,73	240	10,29	470	10,03
150	8,91	250	10,40	500	9,75

For ships with restricted service,  $C_{W0}$  may be reduced as follows:

- Class notation R0: No reduction
- Class notation R1: No reduction
- Class notation R2: 5%
- Class notation R3: 12,5%
- Class notation R4: 20%

**303** The section modulus requirements about the transverse neutral axis based on cargo and ballast conditions are given by:

$$Z = \frac{|M_S + M_W|}{\sigma_t} 10^3 \quad (\text{cm}^3)$$

$$\sigma_t = 175 f_1 \text{ N/mm}^2 \text{ within } 0,4 L \text{ amidship.}$$

$$= 105 f_1 \text{ N/mm}^2 \text{ within } 0,1 L \text{ from A.P. or F.P.}$$

Between specified positions  $\sigma_t$  is to be varied linearly.

**304** When still water bending moments calculated for harbour and sheltered water conditions (enclosed fjords, lakes, rivers) are inserted in the formula in 303, the unrestricted service wave bending moments may be reduced by 30%.

**305** The midship section modulus about the vertical neutral axis (centreline) is normally not to be less than:

$$Z_{OH} = \frac{S}{f_1} L^{9/4} (T + 0,3 B) C_B \quad (\text{cm}^3)$$

The above requirement may be disregarded provided the combined effects of vertical and horizontal bending stresses at bilge and deck corners are proved to be within  $195 f_1 \text{ N/mm}^2$ . The combined effect may be taken as:

$$\sigma_s + \sqrt{\sigma_w^2 + \sigma_{wh}^2}$$

- $\sigma_s$  = stress due to  $M_S$
- $\sigma_w$  = stress due to  $M_W$
- $\sigma_{wh}$  = stress due to  $M_{WH}$ , the horizontal wave bending moment given by:

$$M_{WH} = 0,44 L^{9/4} (T + 0,3 B) C_B \quad (\text{kNm})$$

### C 400 Moment of inertia.

**401** The midship section moment of inertia about the transverse neutral axis is not to be less than:

$$I = 3 C_W L^3 B (C_B + 0,7) \quad (\text{cm}^4)$$

## Beräkning av skjuvspänningar för öppen eller symmetrisk encellig sektion

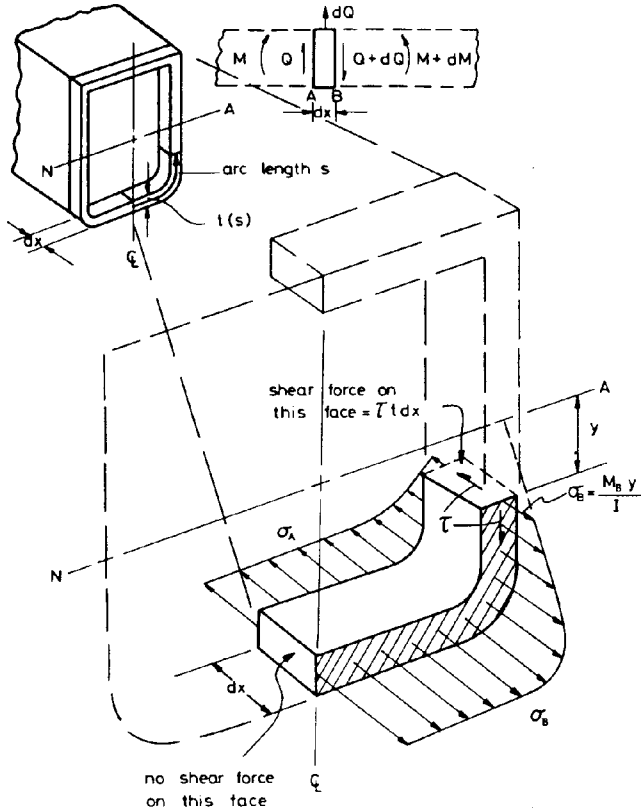


Figure 3.22 Free body diagram for transverse shear.

$$\tau dx = \int_0^s \sigma_B t ds - \int_0^s \sigma_A t ds \quad (3.7.1)$$

Substituting  $\sigma = My/I$  on both faces

$$\tau dx = \frac{M_B - M_A}{I} \int_0^s yt ds$$

$$= \frac{dM}{I} \int_0^s yt ds$$

and substituting  $dM = Q dx$  gives

$$\tau = \frac{Q}{I} \int_0^s yt ds \quad (3.7.2)$$

The integral on the right-hand side is a function of the geometry of the section and of position  $s$  around the section. For convenience we assign the symbol  $m$  to this quantity:

$$m = \int_0^s yt ds \quad (3.7.3)$$

and we note that  $m$  is the first moment about the neutral axis of the cumulative section area starting from the "open" end (shear-stress-free end) of the section.

Substituting for  $m$  in (3.7.2) and solving for  $\tau$ :

$$\tau = \frac{Qm}{It} \quad (3.7.4)$$

$$q = \frac{Qm}{I} \quad (3.7.6)$$

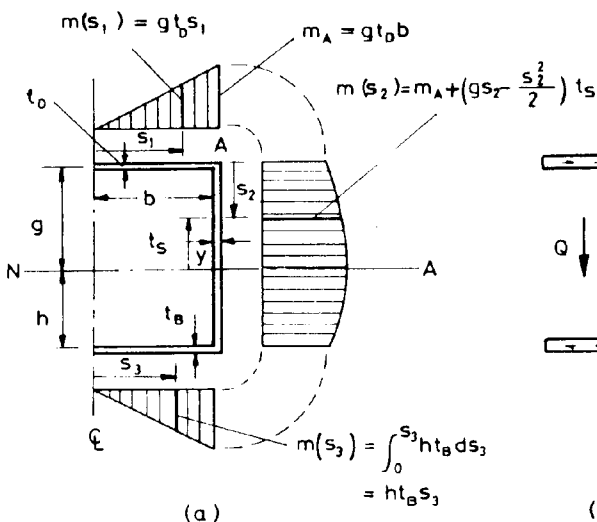


Figure 3.23 Calculation of moment term  $m$  by integrating along branches.

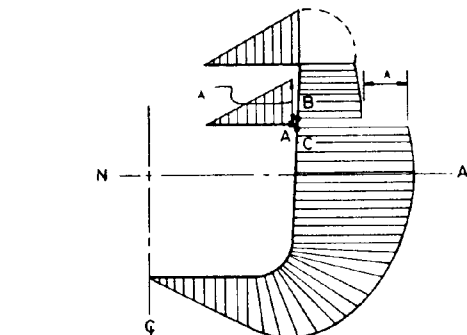
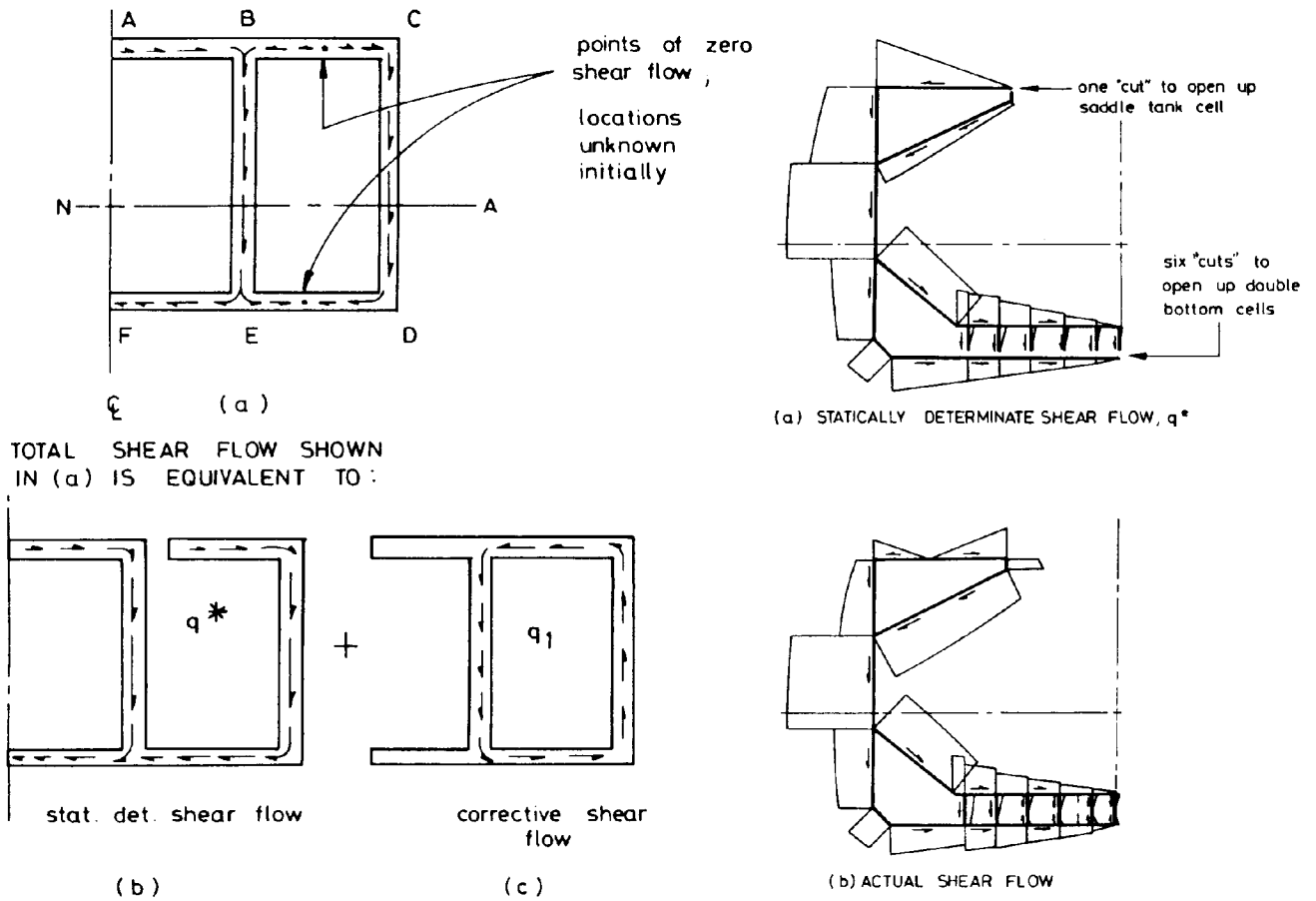


Figure 3.24 Conservation of shear flow at corners and branch points.

## Beräkning av skjuvspänningar i flercellig sektion



**Figure 3.27** Calculation of shear flow in multicell sections.

$$q = q^* + \sum_{i=1}^N q_i \quad (3.7.9)$$

$$\text{slip} = \oint \gamma ds = \frac{1}{G} \oint \tau ds = \frac{1}{G} \oint \frac{q}{t} ds \quad (3.7.10)$$

$$\oint_{\text{cell } j} \left( \frac{q}{t} \right) ds = 0 \quad (j = 1, \dots, N) \quad (3.7.11)$$

$$\left. \begin{aligned} \oint_{\text{cell } 1} \frac{q_1}{t} ds + \oint_{\text{cell } 1} \frac{q_2}{t} ds + \dots + \oint_{\text{cell } 1} \frac{q_N}{t} ds &= - \oint_{\text{cell } 1} \frac{q^*}{t} ds \\ \oint_{\text{cell } 2} \frac{q_1}{t} ds + \oint_{\text{cell } 2} \frac{q_2}{t} ds + \dots + \oint_{\text{cell } 2} \frac{q_N}{t} ds &= - \oint_{\text{cell } 2} \frac{q^*}{t} ds \\ \vdots & \\ \oint_{\text{cell } N} \frac{q_1}{t} ds + \oint_{\text{cell } N} \frac{q_2}{t} ds + \dots + \oint_{\text{cell } N} \frac{q_N}{t} ds &= - \oint_{\text{cell } N} \frac{q^*}{t} ds \end{aligned} \right\}$$

It should be noted that all of the terms on the left-hand side are of the form

$$\oint_{\text{cell } j} \frac{q_i}{t} ds$$

and so for any two cells  $i$  and  $j$  which are *not adjacent* the corresponding term will be zero, and if they are adjacent the cyclic integral will only yield a nonzero value along their common boundary.

## Klassreglernas krav på skrovbalkens skjuvhållfasthet (ex ur DnV)

**105** The design values of stillwater shear forces along the length of the ship are normally not to be taken less than:

$$Q_S = k_{sq} Q_{SO} \quad (\text{kN})$$

$$Q_{SO} = 5 \frac{M_{SO}}{L} \quad (\text{kN})$$

$M_{SO}$  = design stillwater bending moments (sagging or hogging) given in 103.

Larger values of  $Q_S$  based on load conditions ( $Q_S = Q_{SL}$ ) are to be applied when relevant, see 102. For ships with arrangement giving small possibilities for variation in the distribution of cargo and ballast,  $Q_{SO}$  may be dispensed with as design basis.

$k_{sq} = 0$  at A.P. and F.P.  
 $= 1,0$  between 0,15 L and 0,3 L from A.P.  
 $= 0,8$  between 0,3 L and 0,6 L from A.P.  
 $= 1,0$  between 0,7 L and 0,85 L from A.P.

Between specified positions  $k_{sq}$  is to be varied linearly.

**203** The Rule values of vertical wave shear forces along the length of the ship are given by:

Positive shear force, to be used when positive still water shear force:

$$Q_{WP} = 0,3 k_{wqp} C_W L B (C_B + 0,7) \quad (\text{kN})$$

Negative shear force, to be used when negative still water shear force:

$$Q_{WN} = -0,3 k_{wqn} C_W L B (C_B + 0,7) \quad (\text{kN})$$

Positive shear force when there is a surplus of buoyancy forward of section considered, see also Fig.1.

Negative shear force when there is a surplus of weight forward of section considered.

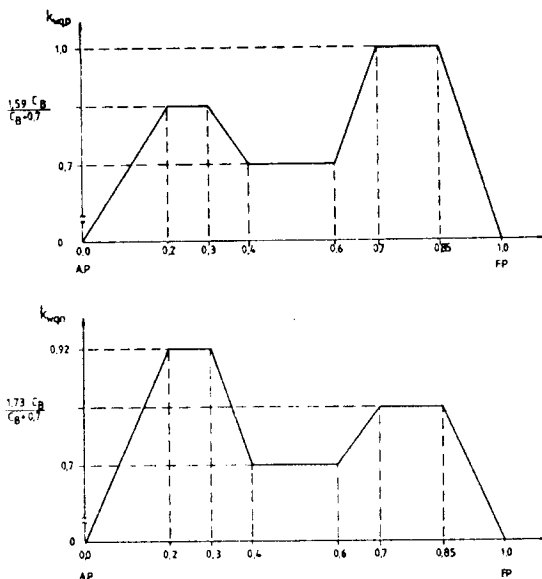


Fig. 4 Wave shear force distribution.

### D. Shear Strength.

#### D 100 General.

**101** The shear stress in ship's sides and longitudinal bulkheads is not to exceed  $110 f_1$  N/mm<sup>2</sup>. In addition the plate panels are to be checked for adequate shear and combined buckling strength as outlined in Sec.14 B300 and 500.

**102** The thickness requirements given below apply unless smaller values are proved satisfactory by an accepted method of direct stress calculation, including a shear flow calculation and a calculation of bottom load distribution.

**103** The thickness requirements to side shell (or combined thickness of inner and outer shell when double skin) and possible longitudinal bulkhead are given by:

$$t = \frac{|\Phi (Q_S + Q_W) \pm 0,5 \Delta Q_S|}{\tau} \frac{S_N}{I_N} 10^2 \quad (\text{mm})$$

$\Phi$  = shear force distribution factor.  
 $= 0,5$  for side shell or double skin in ships without longitudinal bulkheads.

$$= 0,164 + 0,08 \frac{A_S}{A_L}$$

for side shell in ships with two longitudinal bulkheads.

$$= 0,336 - 0,08 \frac{A_S}{A_L}$$

for longitudinal bulkhead in ships with two longitudinal bulkheads.

For other arrangements  $\Phi$  will be specially considered.

$\Delta Q_S$  = shear force correction due to shear carrying longitudinal bottom members (girders or stiffeners) and uneven transverse load distribution.

= 0 when  $Q_S = k_{sq} Q_{SO}$ , as given in B105.

=  $\Delta Q_{SL}$  when  $Q_S = Q_{SL}$ , i.e. based on cargo and ballast conditions.  $\Delta Q_{SL}$  is given in 200 for ships with single or double skin and full breadth double bottom, and in 300 for ships with two longitudinal bulkheads.

For other arrangements  $\Delta Q_S$  will be specially considered.

$\tau = 110 f_1$  N/mm<sup>2</sup>, provided the buckling strength (see 101) does not require smaller allowable stress.

$I_N/S_N$  may normally be taken as 90 D at the neutral axis. For other horizontal levels than the neutral axis  $S_N$  is to be taken as the first moment, about the neutral axis, of the area of the longitudinal members between the level at which the shear stress is considered and the vertical extremity of effective longitudinal members.

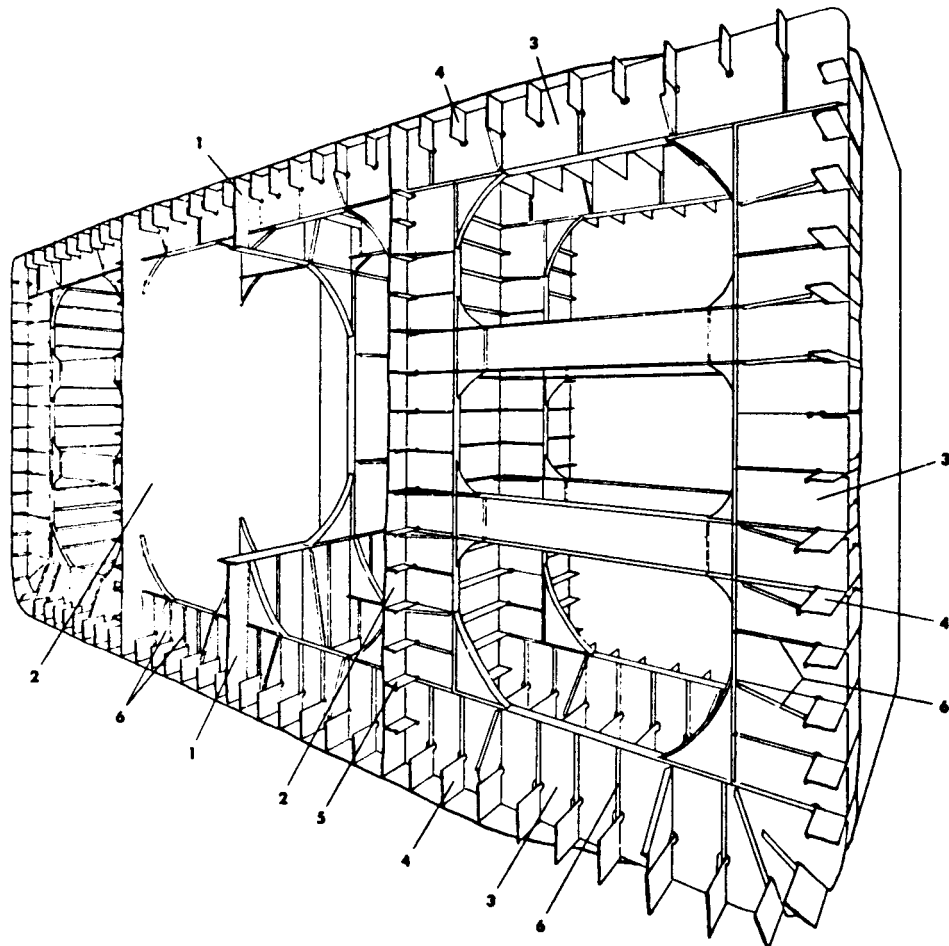
## Teknisk Balkteori

kan (med varierande noggrannhet) användas vid dimensioneringsberäkningar av de flesta konstruktionselement i ett traditionellt stålfartyg.

Förståelsen för hur de yttre lasternas tas upp i konstruktionen och förs över i form av inre tvärkraftfördelningar och böjmoment i de bärande balksystemen, är av grundläggande betydelse för hela konstruktionsarbetet.

## Balkar i fartyg

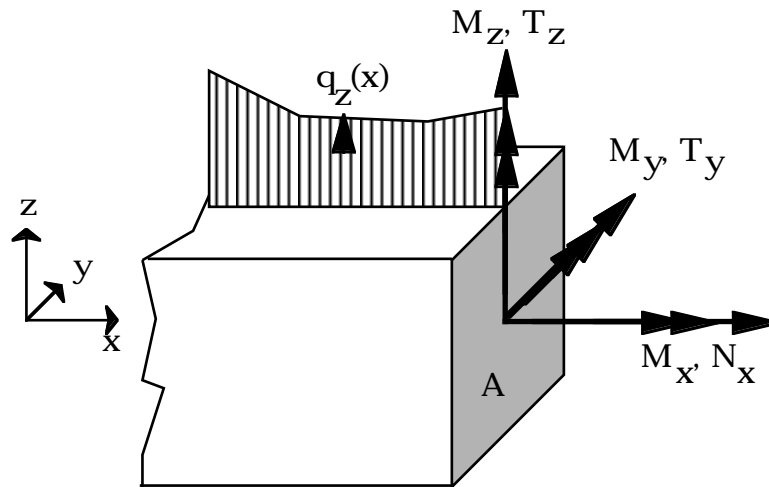
fungerar som lastbärare (vägare/bottenstock etc, *girder*, primärt styrkeförband) eller som lastöverförare (förstyvning, *stiffener*, sekundärt förband).



Exempel på midskeppsektion av ett tankfartyg



## Elementär Balkböjning



Allmänt gäller:

$$N_x = \int \sigma_x \, dA, \quad T_y = \int \tau_{xy} \, dA, \quad T_z = \int \tau_{xz} \, dA$$

$$M_x = \int (\tau_{xz}y - \tau_{xy}z) \, dA, \quad M_y = \int \sigma_x z \, dA, \quad M_z = -\int \sigma_x y \, dA$$

jämviktssamband:

$$\frac{dN_x}{dx} = -q_x, \quad \frac{dT_y}{dx} = -q_y, \quad \frac{dT_z}{dx} = -q_z$$

$$\frac{dM_y}{dx} = T_z, \quad \frac{dM_z}{dx} = T_y$$

För böjning i xz-planet: (Se Sundström "Enaxl..." 9.3)

$$N_x(x) = N(x), \quad T_z(x) = T(x), \quad M_y(x) = M(x)$$

$$\frac{dT(x)}{dx} = -q(x), \quad \frac{dM(x)}{dx} = T(x)$$

med normalspänningen

$$\sigma_x(x, y, z) = \frac{M(x) z}{I_y(x)} + \frac{N(x)}{A(x)} = \frac{M(x)}{W(x)} + \frac{N(x)}{A(x)}$$

där  $I_y(x)$  är yttröghetsmomentet runt y-axeln och

där  $W(x) = \frac{I_y(x)}{z}$  är böjmotståndet vid den aktuella sektionen

## Idealisering

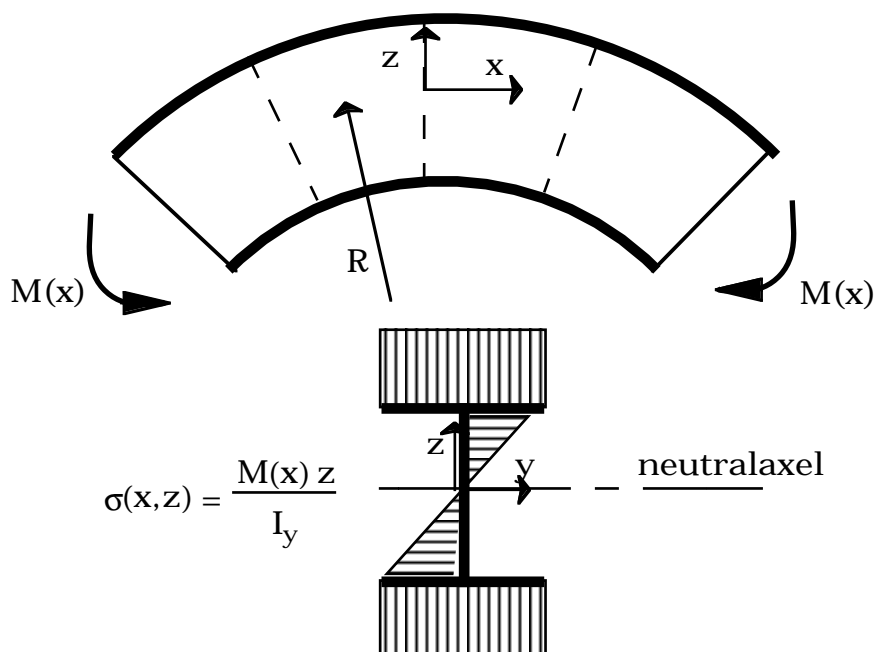
I den tekniska balkteorin (enl Bernoulli-Navier) antas att plana tvärsnitt förblir plana vid böjning, samt att tvärsnittet bibehålles vinkelrätt mot balkens huvudaxel.

Detta innebär att balktvärsnittets relativa förlängning (töjning),  $\varepsilon$ , är proportionell mot avståndet från neutralaxeln.

Vidare antas för varje "fiber" i balken att Hooks lag vid enaxligt spänningstillstånd gäller:

$$\sigma = E \varepsilon = E z/R$$

varvid även spänningarna blir direkt proportionella mot avståndet till neutralaxeln.



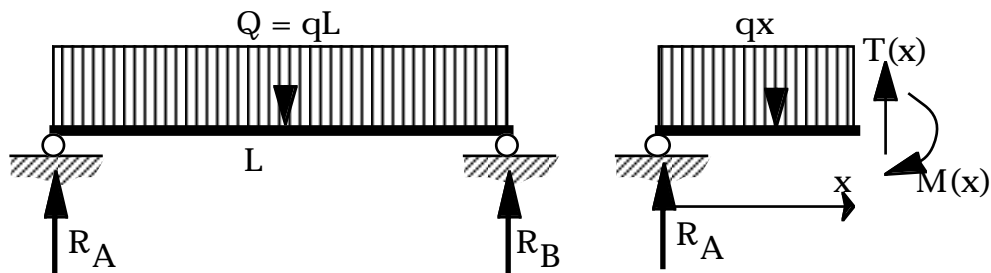
Normalspänningen i flänsen blir med denna idealisering konstant över hela bredden (konstant map  $y$ ).

Som vi ska se senare gäller detta inte om flänsen är bred i förhållande till balkens längd.

## Momentfördelning Tvärkraftfördelning

För statiskt bestämda balkar kan man lösa ut fördelningarna ur jämviktsvillkor eller genom direkt integration av lastfördelningen.

### Exempel



#### Alternativ 1 (jämviktsvillkor)

Yttre krafter:  $\uparrow: -qL + R_A + R_B = 0$

$$A_{\perp}: qL \frac{L}{2} - R_B L = 0 \Rightarrow R_A = R_B = \frac{qL}{2}$$

Snittkrafter:  $\uparrow: \frac{qL}{2} - qx + T(x) = 0 \Rightarrow T(x) = q\left(x - \frac{L}{2}\right)$

$$A_{\perp}: qx \frac{x}{2} - T(x) x + M(x) = 0 \Rightarrow M(x) = \frac{q}{2}(x^2 - Lx)$$

#### Alternativ 2: (direkt integration)

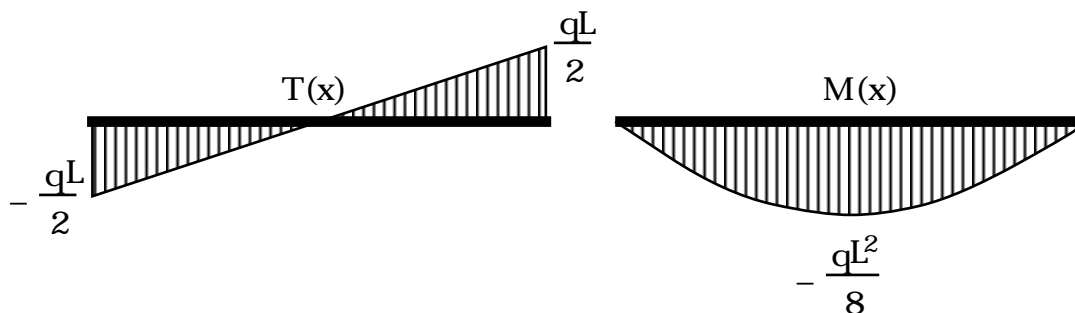
$$\frac{dT(x)}{dx} = -(-)q \quad (\text{obs } q \text{ positiv uppåt enl våra teckendef.})$$

$$\int dT(x) = \int q dx \Rightarrow T(x) = qx + C_1$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = T(x) \Rightarrow \int dM(x) = \int T(x) dx \Rightarrow M(x) = \frac{qx^2}{2} + C_1x + C_2$$

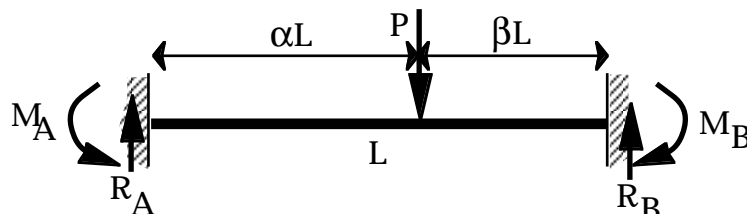
Randvillkor: (fritt upplagda balkändar)  $M(0) = 0, M(L) = 0 \Rightarrow$

$$C_2 = 0, C_1 = -\frac{qL}{2} \Rightarrow M(x) = \frac{q}{2}(x^2 - Lx)$$



För statiskt obestämda balkar måste man utöver jämviktsvillkor även utnyttja deformationsvillkor (kompatibilitet) för att kunna lösa ut snittstorheterna  $T(x)$  och  $M(x)$ .

### Exempel



Yttre jämvikt:  $R_A + R_B = P$ ,  $M_A = P\alpha L - R_B L + M_B$

Snittkrafter: (Macaulay-formalism, se Sundström "Enaxl..." 2,3,6)

$$q(x) = -P \{x - \alpha L\}^{-1}, \quad T(x) = - \int q(x) dx = P \{x - \alpha L\}^0 + C_1$$

$$M(x) = \int T(x) dx = P \{x - \alpha L\} + C_1 x + C_2$$

Randvillkor:

$$T(0) = -R_A, \quad T(L) = R_B \Rightarrow C_1 = -R_A = R_B - P$$

$$M(0) = M_A, \quad M(L) = M_B \Rightarrow C_2 = M_A = M_B - P\beta L + R_A L$$

(Vi ser att randvillkoren inte tillför något nytt utöver jämviktsambanden ovan)

Deformationssamband:

("elastiska linjens ekvation" för "slanka balkar", se Sundström "Enaxl..." 9.7.5)

$$w''(x) = - \frac{M(x)}{EI} = \frac{1}{EI} [ -P \{x - \alpha L\} + R_A x - M_A ]$$

$$w'(x) = \frac{1}{EI} \left[ -P \frac{\{x - \alpha L\}^2}{2} + R_A \frac{x^2}{2} - M_A x + C_3 \right]$$

$$w(x) = \frac{1}{EI} \left[ -P \frac{\{x - \alpha L\}^3}{6} + R_A \frac{x^3}{6} - M_A \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4 \right]$$

Randvillkor:

$$w'(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0, \quad w(0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0$$

$$w'(L) = 0 \Rightarrow M_A = -P \frac{\beta^2 L}{2} + R_A \frac{L}{2} \quad \text{insatt i}$$

$$w(L) = 0 \Rightarrow R_A = P (3\beta^2 - 2\beta^3)$$

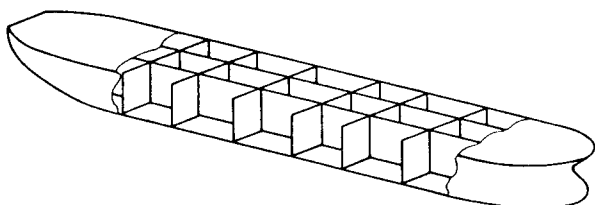
Varvid resten av de obekanta reaktionsstorheterna kan lösas:

$$M_A = PL (\beta^2 - \beta^3) \quad \text{och analogt för } R_B \text{ och } M_B$$



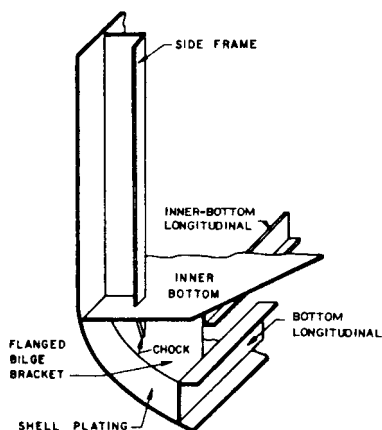
## Balkar i fartyg , några exempel

### Hela fartygsskrovet



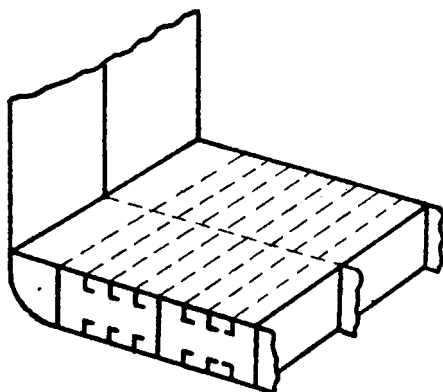
Det vertikala böjmomentet i skrovbalken uppstår pga skillnader i fördelningen av fartygets massa inkl last och det hydrostatiska trycket på fartygets botten (spantareakurvan). Vid gång i vågor tillkommer tröghetskrafter och hydrodynamiska tryck. Vid böjning av fartygsskrovet utgör däck och botten flänsar medan sidobordläggning och ev längskeppsskott fungerar som livplåtar.

### Sidobordläggning



Den laterala belastningen pga skillnader i yttre och inre tryck verkar på bordläggningsplåten men tas upp av förstävningarna och förs över till de primärt bärande förbanden (vebbar, stringers, däck). Förstävningarna (spanten) fungerar som balkar med bordläggningsplåten som "fläns" på ena sidan. Denna fläns är ofta i storleksordningen 5 ggr bredare än spantprofilernas livhöjd.

### Dubbelbotten



Belastningar från lastrummet och från yttre vattentryck plus överlagrade normalspänningar från skrovbalkens globala böj deformation

## Kollaps av balkar

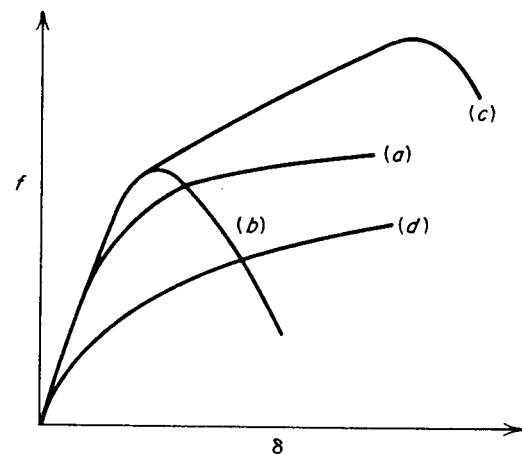
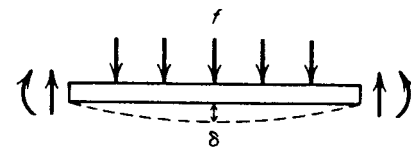
I skrovkonstruktionen används balkmetoder i första hand för dimensionering inom det linjärt elastiska området, för att bestämma nominella spänningar och deformationer som är små i förhållande till "balk- dimensionerna". Den verkliga kollapsen för ett enskilt konstruktionselement sker ofta som följd av flera olika fenomen och blir starkt beroende av hur belastningar och deformationer överförs till den omgivande konstruktionen.

Normalt finns en betydande reservstyrka kvar efter det att lokal plasticering börjar inträffa (redundans).

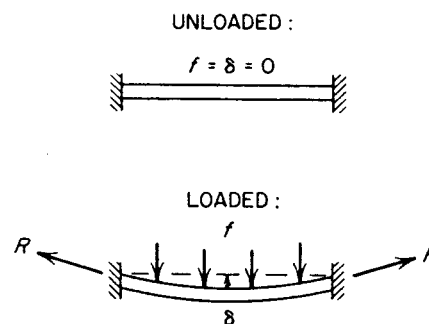
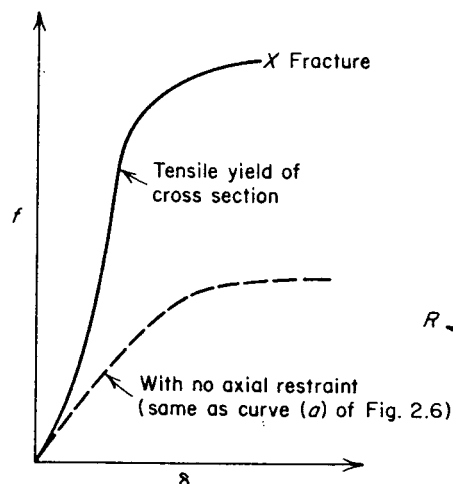
For steel members the three basic types of failure and their subdivisions are as follows:

1. Large local plasticity
2. Instability
  - Bifurcation
  - Nonbifurcation
3. Fracture
  - Direct (tensile rupture)
  - Fatigue
  - Brittle

In practice an individual failure in a structural member often involves a combination of these basic types, particularly the first and second types. For example, for sturdy members instability is preceded and accompanied by plasticity. Also the occurrence of local plasticity can seriously diminish the stability of a member and even convert it into a mechanism.



**Figure 2.6** Load—deflection curves: (a) failure by plastic deformation, (b) bifurcation buckling of beams and columns, (c) bifurcation buckling of plates, and (d) nonbifurcation buckling.

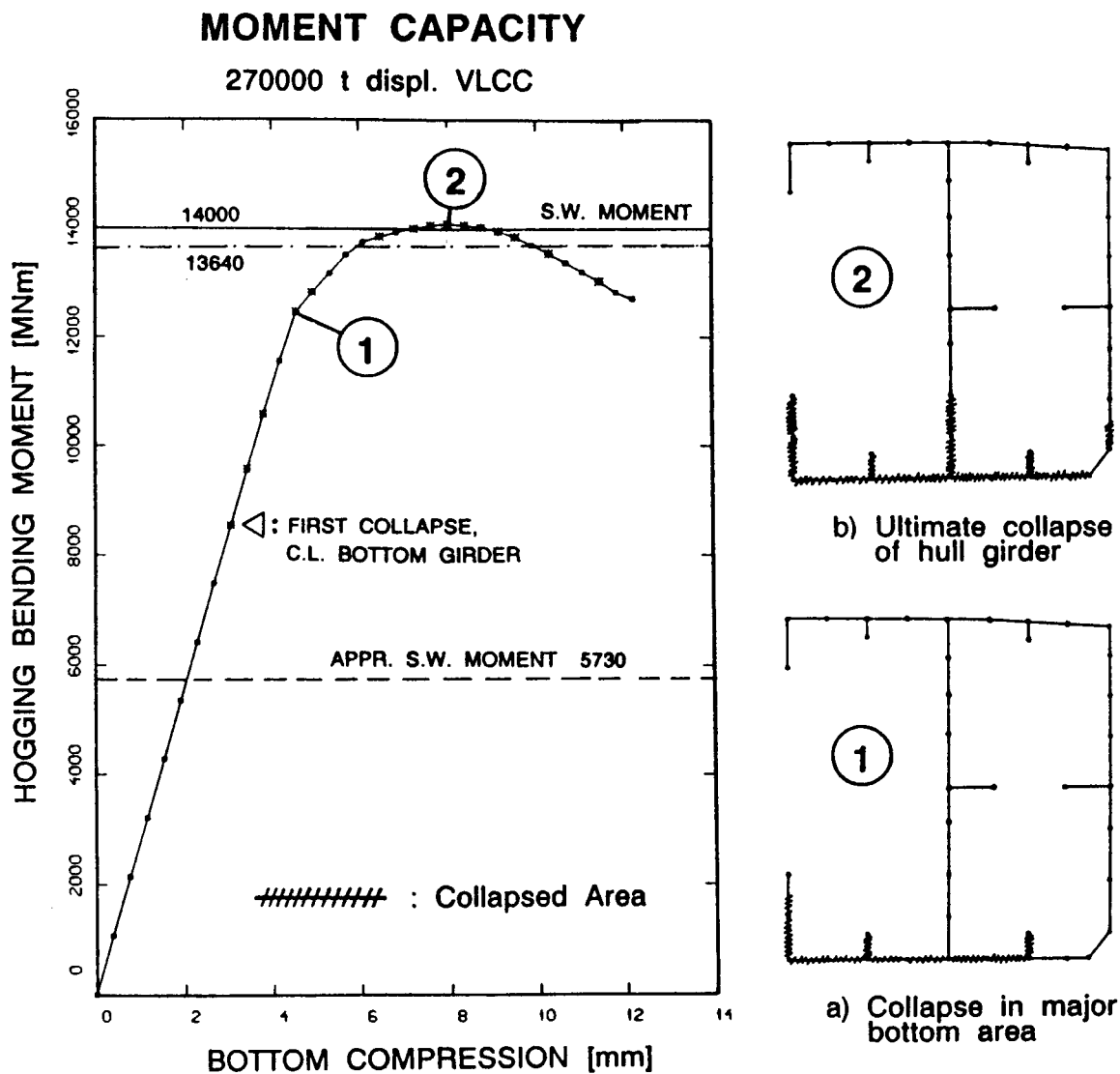


**Figure 2.7** Example of strengthening influence of deflection on internal force.

### Exempel på kollaps av ett tankfartyg p g a hoggingmoment

DnV PAPER SERIES  
No.: 88-P004, July 1988

Page : 9



**Fig. 5 Comparison of Numerical Strength Prediction (FENCOL) and full scale accident of VLCC.**

Observed collapse moment range is 13640-14000 MNm

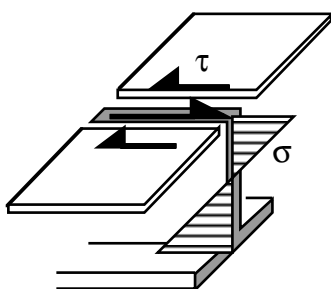
The overall behaviour is fairly linear up to the point where a major collapse of the bottom panels takes place 1, Fig. 5a. However, the lower part of the centreline bottom girder collapses at a much lower load level. This is a small area, and contributes insignificantly to the strength and stiffness of the overall cross-section. Hence, the governing failure mechanism is the collapse of the bottom panels 1. The subsequent strength reserve comes from redistribution of the load in the cross-section following further collapse of panels in the sides and longitudinal bulkheads 2.

## Plåtflänsar

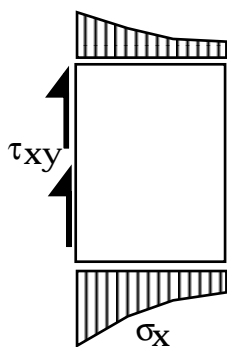
De balkar som ingår i en skrovkonstruktion har ofta en plåtfläns med stor utbredning i förhållande till de övriga dimensionerna.

När så är fallet kan man inte längre anta att spänningstillståndet är enaxligt med konstant normalspänning över hela flänsens bredd.

### Shear lag



Samverkan mellan liv och fläns sker genom skjuvkrafter ( i svetsen mellan förstyvning och plåt). Då plåtflänsen är tunn i förhållande till balklivet, kan dess egen böjstyvhet försummas och skjuvkrafterna kan antas verka i plåtens mittplan.



Skjuvkrafterna ger i breda flänsar upphov till en ojämn längsspänning utefter flänsens bredd. Även deformationerna blir ojämma och plana snitt förblir ej plana. Detta fenomen brukar kallas "shear lag".

I anslutningen mellan liv och fläns följer flänsen helt livets töjning och får spänningen

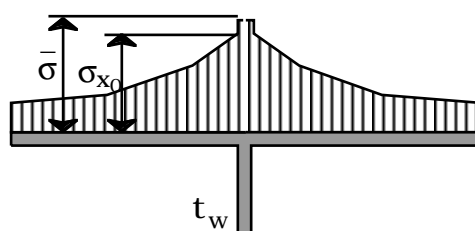
$$\bar{\sigma} = E \varepsilon_x$$

I flänsens fria del uppstår ett plant två-axligt spänningstillstånd

$$E \varepsilon_x = \sigma_x - \nu \sigma_y$$

Vid randen  $y_0 = t_w / 2$  är töjningarna i fläns och liv lika stora vilket ger

$$\bar{\sigma} = \sigma_{x0} - \nu \sigma_{y0}$$





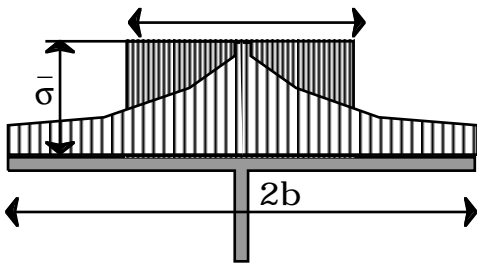
## Effektiv flänsbredd

Vid styrkeberäkningar av balkliknande konstruktioner med breda flänsar, kan man ta hänsyn till den varierande normalspänningen i flänsen genom att i beräkningen av balkens böjmotstånd endast beakta en viss effektiv flänsbredd.

### Definition

Den effektiva bredden definieras så att en konstant spänning (enligt enkel balkteori) över den tänkta effektiva bredden ger samma totala normalkraft i flänsen som den verkliga spänningsfördelningen.

Total normalkraft i flänsen blir  
(för en dubbelsidig symmetrisk fläns)

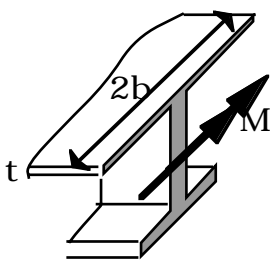


$$2t \int_0^b \sigma_x dy = 2t \bar{\sigma} \bar{b} \quad \text{där}$$

$$\bar{b} = \frac{\int_0^b \sigma_x dy}{\bar{\sigma}} = \frac{\int_0^b \sigma_x dy}{\sigma_{x0} - \nu \sigma_{y0}} \quad (ef.2)$$

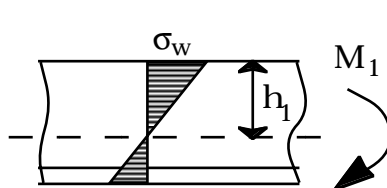
blir vår definition på effektiv flänsbredd för detta fall

## Härledning av sambandet mellan böjmoment och flänsspänning



Vi betraktar en balk med bred tunn dubbelsidig fläns. Den lokala böjstyvheten i den tunna plätflänsen kan normalt försummas och det böjande momentet  $M$  delas in i två delar:

### 1: Moment i balken utan fläns

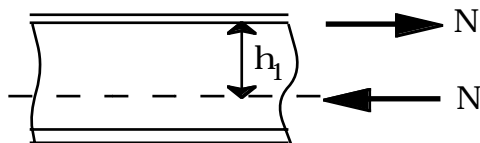


$$M_1 = \sigma_w \frac{I_1}{h_1} \quad \text{där } I_1 \text{ gäller den fria balken enbart}$$

och där  $h_1$  är avståndet mellan den fria balkens neutrallager och plätflänsen

$A_1, I_1$

## 2: Moment pga normalkrafter i flänsen



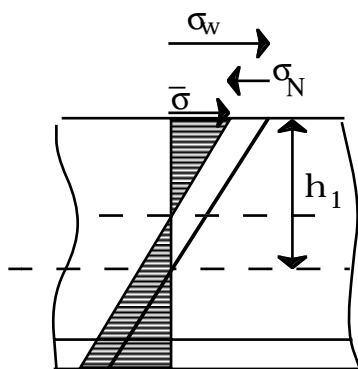
$$M_2 = N h_1 = 2t \int_0^b \sigma_x dy \cdot h_1 = 2t \bar{\sigma} \bar{b} h_1$$

I den fria balken erhålls en motriktad normalkraft med tillhörande spänning

$$\sigma_N = - \frac{N}{A_1}$$

Den totala spänningen i balklivet vid plätflänsens anslutning blir

$$\bar{\sigma} = \sigma_w + \sigma_N$$



(detta motsvarar en förskjutning av neutrallaget mot flänsen jämfört med den fria balken utan fläns)

Det totala böjmomentet kan nu uttryckas i form av flänsspänningar:

$$M = M_1 + M_2 = \sigma_w \frac{I_1}{h_1} + N h_1 = (\bar{\sigma} - \sigma_N) \frac{I_1}{h_1} + 2t \bar{\sigma} \bar{b} h_1$$

$$M = \frac{I_1}{h_1} (\sigma_{x0} - \nu \sigma_{y0}) + 2t \left( \frac{I_1}{h_1 A_1} + h_1 \right) \int_0^b \sigma_x dy \quad (ef.3)$$

Flänsspänningsfördelningen och därmed den effektiva medverkande flänsbredden kommer att vara beroende av

- \* Böjmomentfördelningen  $M(x)$
- \* Balkens dimensionsförhållanden ( $I, h, t, mfl$ )
- \* Flänsens inspänning vid sina ränder

## Airy's spänningsfunktion för plant spänningstillstånd

För ett plant spänningstillstånd kan man finna en funktion  $F(x,y)$  sådan att: (se tex Hällf FS Kap.6)

$$\Delta\Delta F = 0 \quad \text{eller} \quad \nabla^4 F = 0 \quad \text{dvs} \quad \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0$$

där

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

och med Hookes lag:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) = \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) = \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right)$$

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{G} \tau_{xy} = - \frac{2(1+\nu)}{E} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)$$

En användbar lösning till spänningsfunktionen erhålls om vi separerar variablerna  $x$  (flänsens längsriktning) och  $y$  (tvärsriktningen), samt låter funktionen av  $x$  vara harmonisk:

$$F_n(x,y) = f_n(y) g_n(x) = f_n(y) \cos\left(\frac{n \pi x}{L} + \gamma\right) \quad \text{med}$$

$$f_n(y) = C_1 \cosh(\alpha y) + C_2 \sinh(\alpha y) + C_3 \alpha y \cosh(\alpha y) + C_4 \alpha y \sinh(\alpha y) \quad (\text{ef. 4})$$

$$\text{där} \quad \alpha = \frac{n \pi}{L}$$

Mot varje term  $f_n(y)$  i spänningsfunktionen svarar ett harmoniskt böjmoment  $M_n(x)$  med avståndet  $L/n$  mellan momentnollpunkterna i balken.

En godtycklig momentfördelning kan utvecklas i Fourierserier varvid också spänningsfunktionen kan bestämmas om förhållandet mellan  $f_n$  och  $M_n$  är känt

$$M(x) = \sum_{n=1}^{\infty} M_n \cos(\alpha x + \gamma), \quad F(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x,y)$$

## Effektiv fläns för harmoniskt böjmoment

För en harmonisk spänningsvariation i x-led blir den effektiva flänsen enligt tidigare definition:

$$\bar{b}_n = \left( \frac{\int_0^b \sigma_x dy}{\sigma_{x0} - \nu \sigma_{y0}} \right)_n = \frac{\int_0^b \frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2} \cos(\alpha x + \gamma) dy}{\left( \frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2} + \nu \alpha^2 f_n \right)_0 \cos(\alpha x + \gamma)} = \frac{\left[ \frac{\partial f_n}{\partial y} \right]_0^b}{\left( \frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2} + \nu \alpha^2 f_n \right)_0} \quad (ef.5)$$

Med hjälp av tre randvillkor på flänsens deformation eller spänning kan tre av konstanterna  $C_{1-4}$  i (ef.4) uttryckas som funktion av den fjärde, t ex  $C_i = C_1 h_i(\alpha, b)$  vilket gör att konstanterna kan förkortas bort i uttrycket för  $\bar{b}_n$ .

Den effektiva flänsbredden för ett harmoniskt varierande böjmoment i balken  $M_n \cos(\alpha x + \gamma)$

kommer endast att bli beroende av flänsens inspänningsförhållanden, dimensionsförhållandet  $\alpha b$ , samt materialkonstanten  $\nu$ .

Så länge randvillkoren för flänsen bibehålls oförändrade kommer alltså flänsens effektivitet att vara konstant utefter hela balken.

För en sammansatt momentfördelning

$$M(x) = \sum M_n \cos(\alpha x + \gamma)$$

kommer däremot effektiviteten att variera utefter balkens längd.

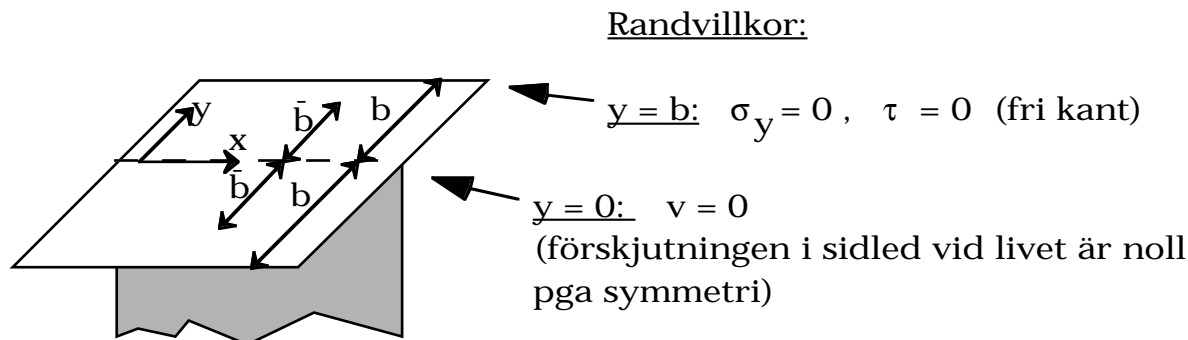
På de följande sidorna redovisas några typiska fall av randvillkor för vilka effektiviteten har lösts analytiskt med spänningsfunktion som skisserats ovan.

Det bör dock observeras att dessa analytiska lösningar bygger på antagandet att randvillkoren är oförändrade utefter flänsens längd.

I verkliga konstruktioner kan det ofta förekomma andra lokala randinflytanden vid balkändarna.

## Effektiv fläns för harmonisk momentfördelning

### FALL I: Symmetrisk fläns med fria kanter (T - profil)



För  $y=0$  gäller även  $\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \gamma}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\partial^3 F_n}{\partial x^2 \partial y}$

samtidigt gäller enl Hookes lag  $\frac{\partial \epsilon_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^3 F_n}{\partial y^3} - \nu \frac{\partial^3 F_n}{\partial x^2 \partial y} \right)$

vilket ger vid randen  $y=0$

$$\frac{\partial^3 F_n}{\partial y^3} + (2+\nu) \frac{\partial^3 F_n}{\partial x^2 \partial y} = 0 \quad \text{dvs} \quad \frac{\partial^3 f_n}{\partial y^3} - \alpha^2 (2+\nu) \frac{\partial^3 f_n}{\partial x^2 \partial y} = 0$$

tillsammans med de övriga två randvillkoren vid  $y=b$  kan vi lösa

$$\frac{\bar{b}_n}{b} = \frac{4 (\sinh 2\alpha b + 2\alpha b)}{2\alpha b [(3-\nu)(1+\nu)\cosh 2\alpha b + (1+\nu)^2 2\alpha^2 b^2 + (5-2\nu+\nu^2)]}$$

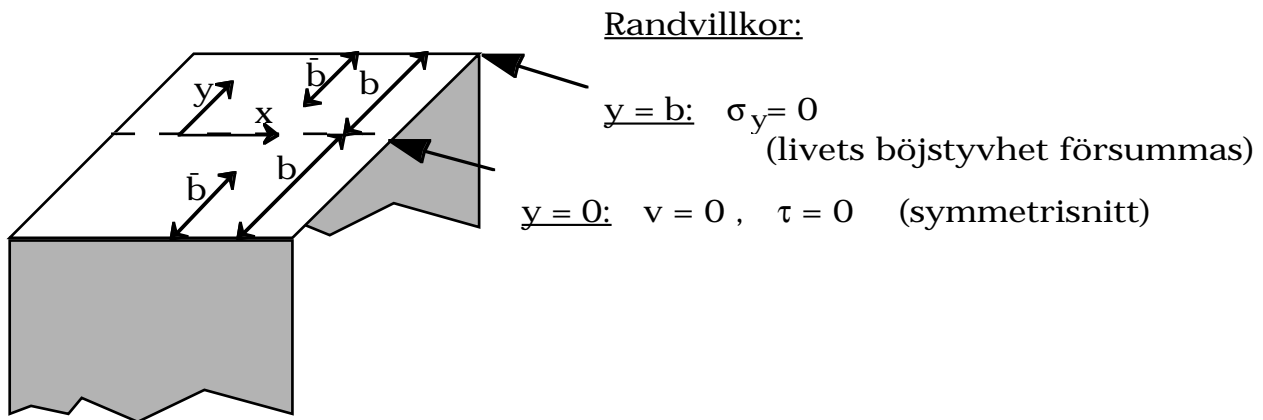
För en mycket bred fläns i förhållande till balklängden mellan momentnollpunkter  $L_n = L/n$ , går effektiva bredden mot

$$\lim_{2\alpha b \rightarrow \infty} \frac{\bar{b}_n}{b} = \frac{2}{\alpha(3-\nu)(1+\nu)} = \{ \text{för } \nu=0,3 \} = 0,18 L_n$$

eller på alternativ form:  $\lim_{2\alpha b \rightarrow \infty} \frac{\bar{b}_n}{b} = \frac{1,14}{2\alpha b}$

För en mycket smal fläns blir  $\lim_{2\alpha b \rightarrow 0} \frac{\bar{b}_n}{b} = b$  (dvs 100% effektiv)

## FALL II: Två livplåtar, en i vardera flänskanten (lådabalk)



En fullständig härledning av detta fall finns redovisat i Appendix.

Randvillkoren ger

$$\frac{\bar{b}_n}{b} = \frac{1}{2\alpha b} \left( \frac{2\alpha b + \sinh 2\alpha b}{1 + \cosh 2\alpha b} \right)$$

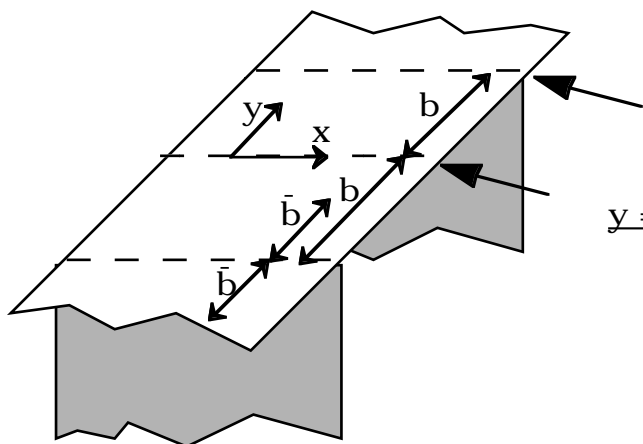
För en mycket bred fläns blir

$$\lim_{2\alpha b \rightarrow \infty} \frac{\bar{b}_n}{b} = 0,16L_n \quad \text{eller} \quad \lim_{2\alpha b \rightarrow \infty} \frac{\bar{b}_n}{b} = \frac{1}{2\alpha b}$$

och för en smal fläns

$$\lim_{2\alpha b \rightarrow 0} \frac{\bar{b}_n}{b} = b \quad (100\% \text{ effektiv})$$

**FALL III: Många livplåtar på samma avstånd med en gemensam plåtfläns (panel)**



Randvillkor:

$y = b$ :  $v = 0$  (symmetri)

$y = 0$ :  $v = 0$ ,  $\tau = 0$  (symmetri)

$$\frac{\bar{b}_n}{b} = \frac{4}{2\alpha b(1+\nu)} \cdot \frac{\cosh 2\alpha b - 1}{(3-\nu) \sinh 2\alpha b - (1+\nu) 2\alpha b}$$

För en mycket bred fläns blir

$$\lim_{2\alpha b \rightarrow \infty} \frac{\bar{b}_n}{b} = \frac{2}{\alpha(3-\nu)(1+\nu)} = \{ \text{för } \nu=0,3 \} = 0,18 L_n$$

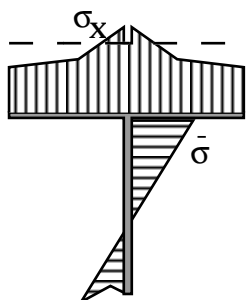
(samma som för Fall I)

och för en smal fläns

$$\lim_{2\alpha b \rightarrow 0} \frac{\bar{b}_n}{b} = \frac{b}{1-\nu^2} = 1,1 b$$

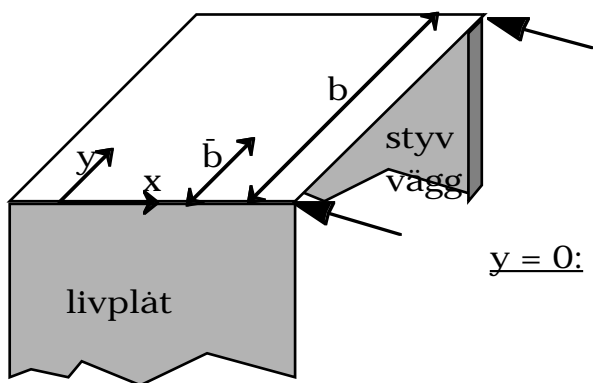
OBS för smala flänsar blir effektiviteten större än "100%" pga den förhindrade tvärkontraktionen. Vid livet kommer det att råda dragspänningar tvärs flänsens längsriktning vilket gör att i uttrycket

$$\sigma = \sigma_{x0} - \nu\sigma_{y0} \quad \text{blir} \quad \sigma_{x0} > \sigma$$



## FALL IV: Flänsens ena kant vid en livplåt, den andra vid en styv vägg

(Den styva väggen kan t ex vara ett mycket böjstyvt skott som är symmetriskt belastat och därför inte böjer ur sitt plan)



Randvillkor:

$$\underline{y = b}: u = 0, v = 0 \quad (\text{styvt})$$

$$\underline{y = 0}: \sigma_y = 0 \quad (\text{livets böjstyvhet försummas})$$

$$\frac{\bar{b}_n}{b} = \frac{(3-\nu) \sinh^2 \alpha b + 2\alpha b \sinh \alpha b + (1+\nu) \alpha^2 b^2 - \frac{4}{1+\nu} (\cosh \alpha b - 1)}{2\alpha b [(3-\nu) \sinh \alpha b \cosh \alpha b + (1+\nu) \alpha b]}$$

För en mycket bred fläns blir

$$\lim_{\alpha b \rightarrow \infty} \frac{\bar{b}_n}{b} = \frac{1}{2\alpha} = 0,16 L_n \quad \text{eller} \quad \lim_{\alpha b \rightarrow \infty} \frac{\bar{b}_n}{b} = \frac{1}{2\alpha b}$$

(samma som för Fall II)

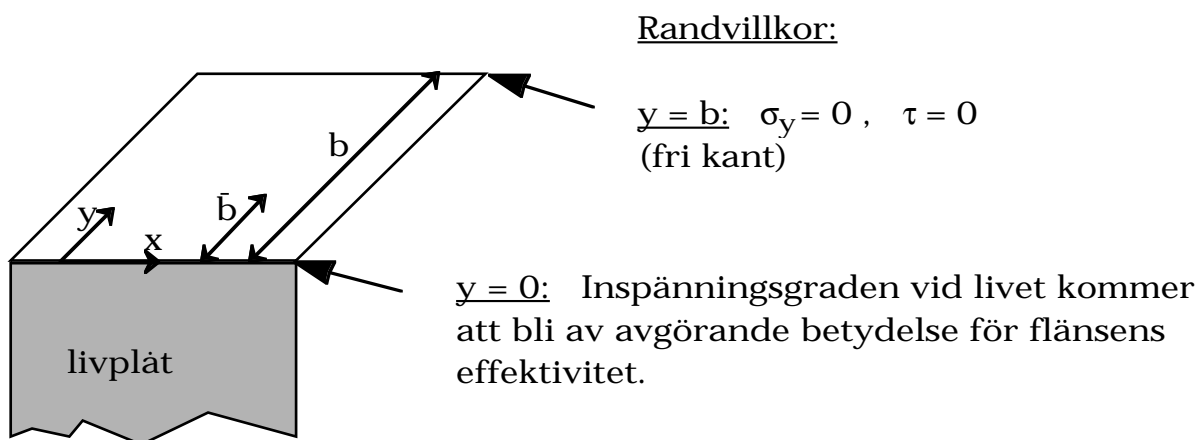
och för en smal fläns

$$\lim_{\alpha b \rightarrow 0} \frac{\bar{b}_n}{b} = b \frac{2 + 3\nu}{4(1+\nu)} = 0,55 b$$

(OBS total effektiv flänsbredd är för detta fall endast  $\bar{b}_n$  och inte  $2\bar{b}_n$  som för de symmetriska Fall I-III)



## FALL V: Osymmetrisk fläns med ena kanten vid livplåten (L-profil) 1(3)



Vi kan särskilja 3 olika fall av randvillkor vid livet:

a) livets böjstyvhet i flänsens plan försummas Detta motsvarar de antaganden som gjorts i de tidigare fallen (tunt liv).  $\sigma_y = 0$

$$\frac{\bar{b}_n}{b} = \frac{1}{2\alpha b} \cdot \frac{\sinh^2 \alpha b - \alpha^2 b^2}{\sinh \alpha b \cosh \alpha b - \alpha b}$$

För en mycket bred fläns blir

$$\lim_{\alpha b \rightarrow \infty} \frac{\bar{b}_n}{b} = \frac{1}{2\alpha} = 0,16 L_n \quad \text{eller} \quad \lim_{\alpha b \rightarrow \infty} \frac{\bar{b}_n}{b} = \frac{1}{2\alpha b}$$

(samma som för Fall II och IV)

och för en smal fläns

$$\lim_{\alpha b \rightarrow 0} \frac{\bar{b}_n}{b} = \frac{b}{4}$$

(Med detta antagande kommer maximalt 25% av hela flänsbredden att vara effektiv vid böjning)

b) Livplåten är mycket böjstyv i flänsens plan.

Detta motsvarar fallet att vi har kantringsbrickor (*tripping brackets*) som förhindrar livets utböjning.

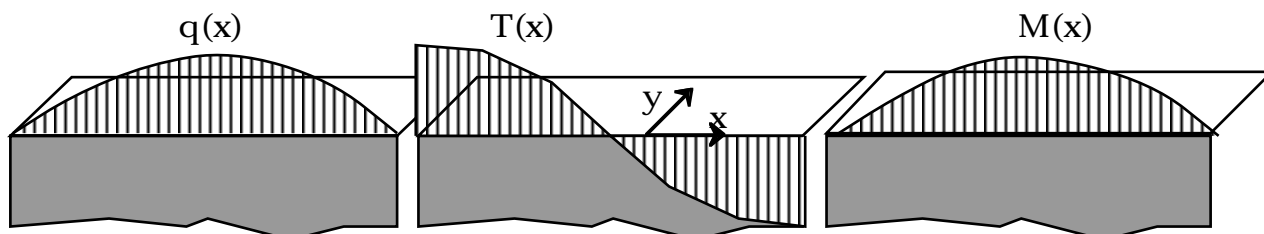
$v = 0$  vid livet, ger oss identiskt samma randvillkor och effektivitet som för fall 1 (symmetrisk fläns med fria kanter)

## FALL V: Osymmetrisk fläns med ena kanten vid livplåten 2(3)

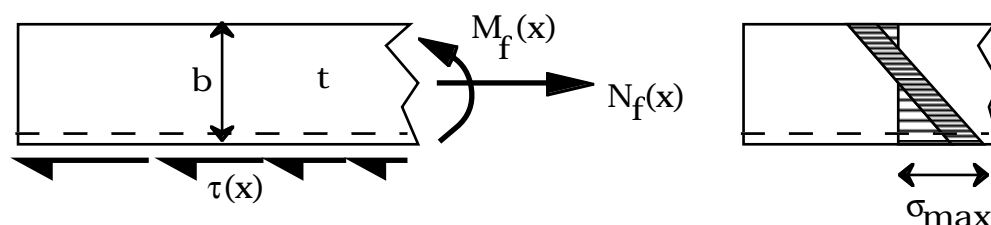
### c) Hänsyn tagen till livets böjstyvhet i plåtens plan

Den låga effektiviteten i fall Va) uppstår pga att flänsen böjer sig i sitt plan

Snittkraftfördelningar i balken (livet):



Snittkraftfördelningar i flänsen:



Spänningarna i flänsen kommer att bestå av en böjspänning och en överlagrad normalspänning

Vid anslutningen till livet får denna sitt största värde

$$\sigma_{\max} = \sigma_b + \sigma_N = \frac{M_f}{W_f} + \frac{N_f}{A_f} = \frac{N_f b}{\frac{2}{b^2 t}} + \frac{N_f}{bt} = \frac{4N_f}{bt}$$

Om vi sätter denna spänning lika med livets böjspänning vid flänsen (giltigt för smala flänsar med obetydlig shear lag) erhålls

$$N_f = t \bar{b} \sigma_{\max} = t \frac{b}{4} \sigma_{\max} \Rightarrow \bar{b} = \frac{b}{4}$$

Vilket alltså är den största effektiva flänsbredd som kan uppnås (jämför fall Va)

Livplåtens styvhet i flänsens plan kommer att motverka utböjningen av flänsen. Detta kan modelleras genom att ansätta en fjädrande inspänning av flänsen vid livet.

Detta kommer att inducera en spänning  $\sigma_y$  i flänsen vid livet. Om vi sätter fjäderkonstanten per längdenhet till R kommer randvillkoret vid livet att bli:

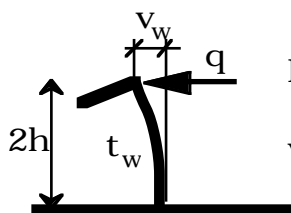
$$\underline{y=0}: \quad \sigma_y = -\frac{Rv}{t}$$

### FALL V: Osymmetrisk fläns med ena kanten vid livplåten 3(3)

Med detta randvillkor erhålls

$$\frac{\tilde{b}_n}{b} = \frac{\sinh^2 \alpha b - \alpha^2 b^2 + \frac{Rb}{Et} \cdot \frac{2}{\alpha b} (\alpha b + \sinh \alpha b \cosh \alpha b)}{2\alpha b (\sinh \alpha b \cosh \alpha b - \alpha b) + \frac{Rb}{Et} [\alpha^2 b^2 (1+\nu)^2 + (3+2\nu-\nu^2) \cosh^2 \alpha b + (1-\nu)^2]}$$

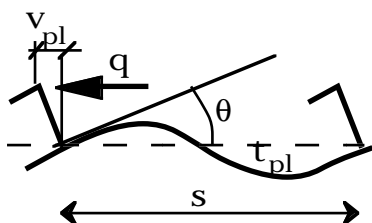
Fjäderkonstanten som motverkar flänsens utböjning måste för en vanlig L-profil beräknas med hänsyn till livplåtens styvhet samt styvheten hos den plåt på vilken profilen är fästad. Mellan liv och fläns uppstår en reaktionskraft  $q$  (per längdenhet).



För böjning av livet gäller:

$$v_w = \frac{q(2h)^3}{3D_w} \quad \text{där livplåtens böjstyvhet är } D_w = \frac{Et_w^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$R_w = \frac{q}{v_w} = \frac{E}{4(1-\nu^2)} \left[ \frac{t_w}{2h} \right]^3$$



För böjning av plåten gäller:

$$v_{pl} = 2h\theta = 2h \frac{2hqs}{12D_{pl}} \quad \text{där plåtens böjstyvhet är } D_{pl} = \frac{Et_{pl}^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$R_{pl} = \frac{q}{v_{pl}} = \frac{E}{4(1-\nu^2)} \left[ \frac{t_{pl}}{sh^2} \right]$$

Den totala utböjningen under lasten  $q$  per längdenhet blir:

$$v = v_w + v_{pl} = q \left( \frac{1}{R_w} + \frac{1}{R_{pl}} \right) = \frac{q}{R} \quad (\text{"seriekopplade fjädrar"})$$

med 
$$\frac{1}{R} = \frac{4(1-\nu^2)}{E} \left[ \frac{8h^3}{t_w^3} + \frac{sh^2}{t_{pl}^3} \right]$$

Sammanfattning av effektiv fläns för harmonisk momentfördelning

Diagram I-IIIa:

Symmetriska dubbelsidiga flänsar, Fall I-III

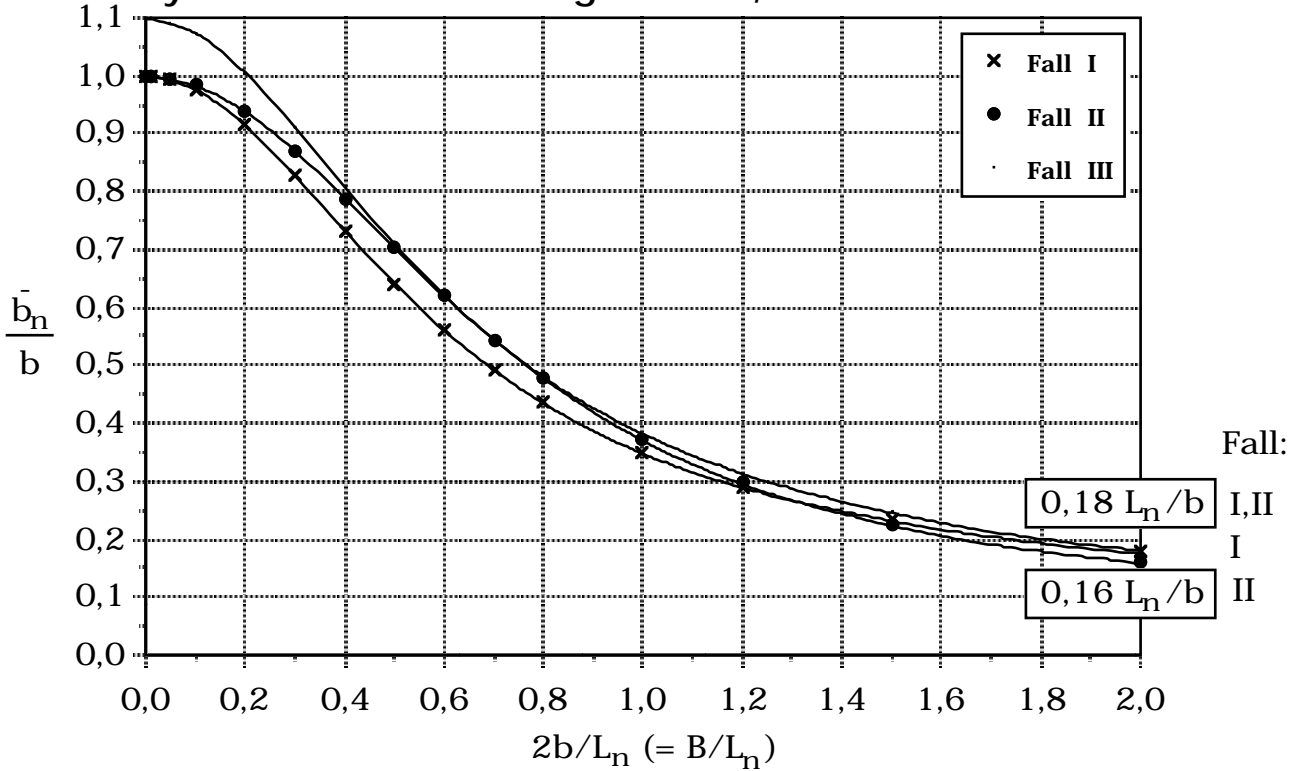
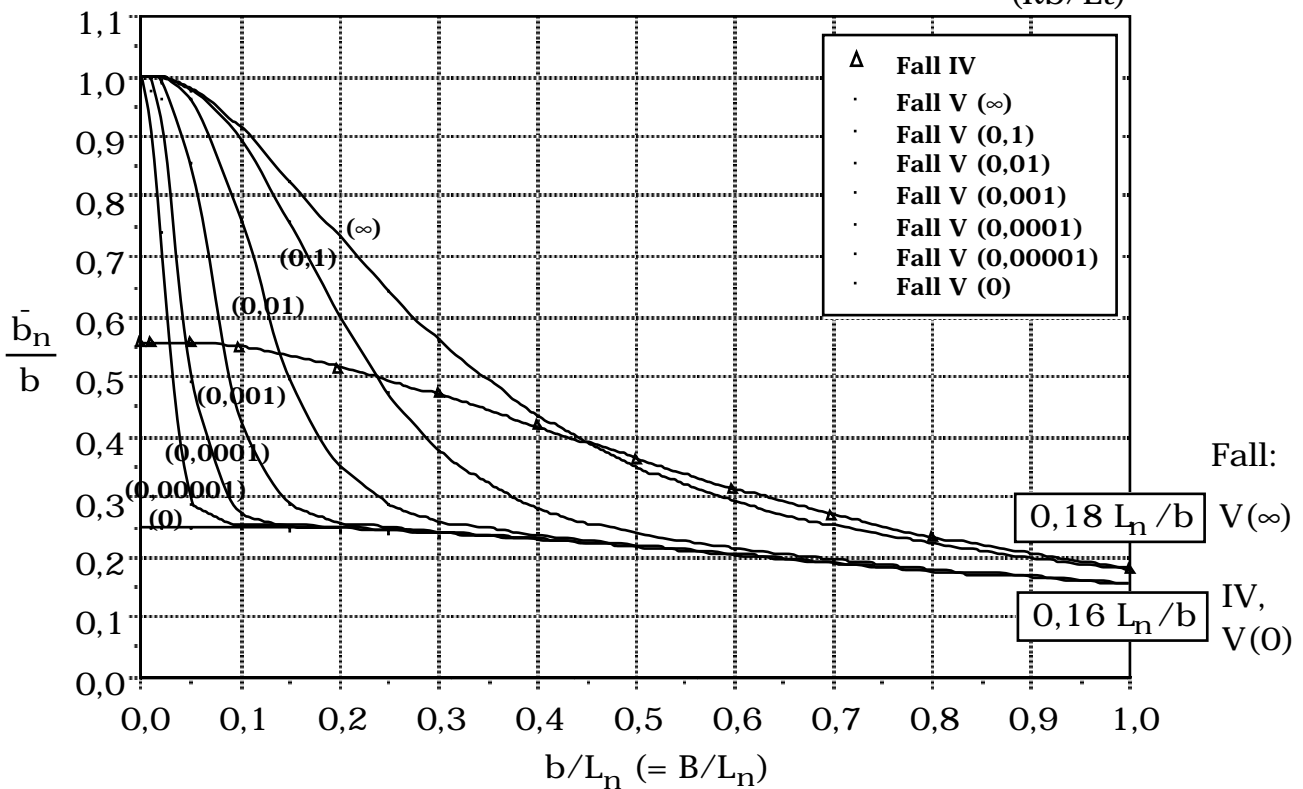


Diagram IV-Va:

Osymmetriska enkelsidiga flänsar, Fall IV-V

( $Rb/Et$ )



## Effektiv flänsbredd för godtycklig momentfördelning

Eftersom vi kan beräkna effektiv flänsbredd analytiskt för en rad fall vid harmonisk momentfördelning, har vi skaffat oss möjlighet att beräkna den även för en godtycklig fördelning skriven som summan av harmoniska komponenter

$$M(x) = \sum M_n \cos(\alpha x + \gamma)$$

Mot varje term svarar en viss effektiv bredd  $\bar{b}_n$  över vilken spänningen antas vara konstant

$$\sigma_n = \frac{M_n \cos(\alpha x + \gamma)}{W_n}$$

Den totala normalkraften i flänsen (symmetrisk fläns) blir

$$N = \sum N_n = 2t \sum \bar{b}_n \bar{\sigma}_n$$

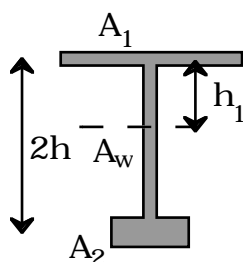
vilket ska vara lika med  $2t \bar{b} \sum \bar{\sigma}_n$

där  $\bar{b}$  är den summerade effektiva flänsbredden

$$\bar{b} = \frac{\sum \left( \bar{b}_n \frac{M_n \cos(\alpha x + \gamma)}{W_n} \right)}{\sum \left( \frac{M_n \cos(\alpha x + \gamma)}{W_n} \right)} \quad (ef.6)$$

Observera här att böjmotståndet  $W$  kommer att variera för de olika harmoniska komponenterna eftersom effektiva flänsbredden är olika.

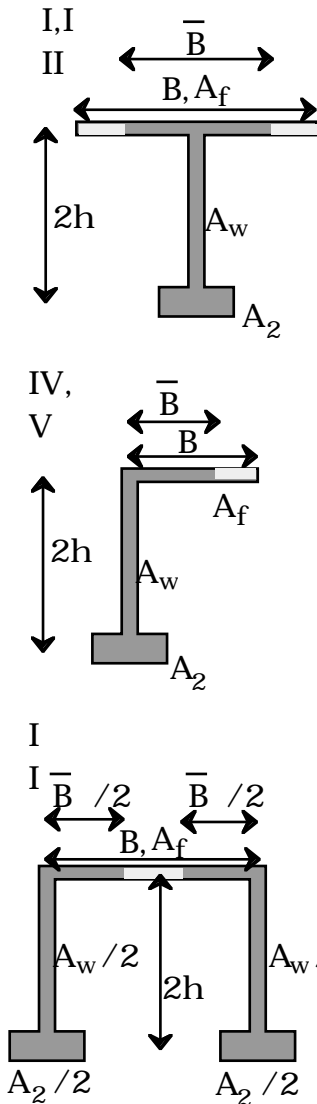
Allmänt för en tunnväggig balk med effektiva flänsareor  $A_1$  resp  $A_2$  och livarean  $A_w$  med höjden  $2h$  blir böjmotståndet i fläns 1:



$$W_1 = \frac{h}{3} \frac{12A_1A_2 + 4A_w(A_1+A_2) + A_w^2}{2A_2 + A_w} \quad (ef.7)$$

med neutrallageravståndet

$$h_1 = h \frac{2A_2 + A_w}{A_1 + A_2 + A_w} \quad (ef.8)$$



Vi betecknar hela flänsens bredd  $B$  och area  $A_f = Bt$   
 Effektiva flänsarean  $A_1$  kan skrivas som  $A_f (\bar{B}/B)$   
 (eller  $A_f (\bar{b}/b)$ ) och böjmotståndet kan delas upp i en  
 rent geometrisk term och en term beroende av  
 flänsens effektivitet:

$$W_1 = \frac{h}{3} \frac{4 A_f (3 A_2 + A_w)}{(2 A_2 + A_w)} \left[ \frac{\bar{b}}{b} + \beta \right] \text{ med} \quad (ef.9)$$

$$\beta = \frac{A_w (4 A_2 + A_w)}{4 A_f (3 A_2 + A_w)}$$

för specialfallet med identiska flänsar  
 $A_f = A_{f1} = A_{f2}$  blir

$$W_1 = (W_2) = 2h A_f \left[ \frac{\bar{b}}{b} + \beta \right] \text{ med } \beta = \frac{A_w}{6 A_f} \quad (ef.10)$$

eftersom den geometriska konstanta faktorn kan flyttas  
 utanför summationen och därmed förkortas bort.  
 (Detta förutsätter dock att  $A_2$  kan betraktas som konstant)

Som ytterligare förenkling kan vi skriva om moment-  
 termerna i summationen på formen

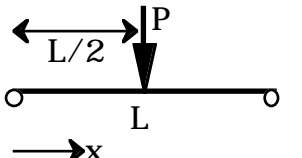
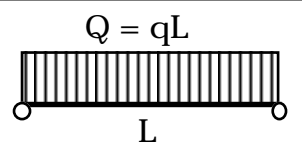
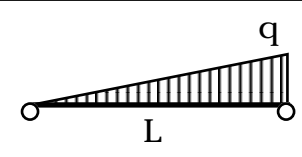
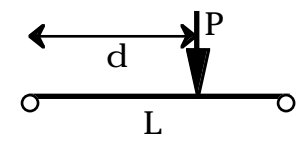
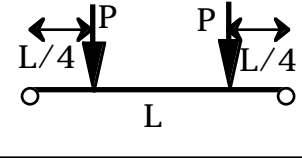
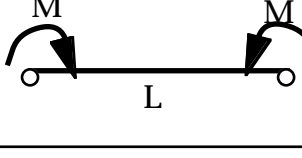
$$M_n \cos(\alpha x + \gamma) = \text{konst} \cdot K_n(x, n)$$

där konstanten enbart blir beroende av momentets  
 storlek samt den faktiska balklängden  $L$

Den sammanlagda relativa effektiviteten blir:

$$\frac{\bar{B}}{B} = \frac{\bar{b}}{b} = \frac{\sum \left[ \frac{(\bar{b}_n/b) K_n}{(\bar{b}_n/b) + \beta} \right]}{\sum \left[ \frac{K_n}{(\bar{b}_n/b) + \beta} \right]} \quad (ef.11)$$

**TABELL 1: Några vanliga momentfördelningar representerade av en serie harmoniska komponenter**

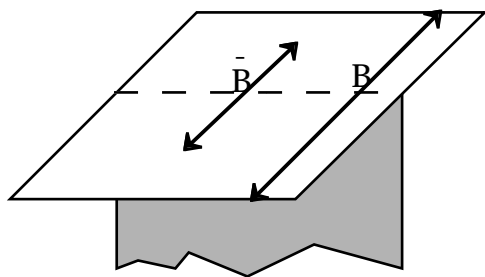
Belastningsfall	Momentfördelning (generellt)	Momentfaktor $M_{\max}$
	$M(x) = -\frac{2PL}{\pi^2} \sum (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi x}{L}$ $n = 1,3,5,7\dots$	Vid $x = L/2$ $K_n = \frac{1}{n^2}$
	$M(x) = -\frac{4qL^2}{\pi^3} \sum \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi x}{L}$ $n = 1,3,5,7\dots$	Vid $x = L/2$ $K_n = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n^3}$
	$M(x) = -\frac{2qL^2}{\pi^3} \sum (-1)^{n-1} \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi x}{L}$ $n = 1,2,3,4 \dots$	Vid $x = L/\sqrt{2}$ $K_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi}{\sqrt{2}}$
	$M(x) = -\frac{2PL}{\pi^2} \sum \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi d}{L} \sin \frac{n\pi x}{L}$ $n = 1,2,3,4 \dots$	Vid $x = d$ $K_n = \frac{1}{n^2} \sin^2 \frac{n\pi d}{L}$
	$M(x) = -\frac{4PL}{\pi^2} \sum \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{4} \sin \frac{n\pi x}{L}$ $n = 1,3,5,7\dots$	Vid $x = L/4$ $K_n = \frac{1}{n^2}$
	$M(x) = -\frac{4M}{\pi} \sum \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{L}$ $n = 1,3,5,7\dots$	Vid $x = L/4$ $K_n = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n}$

I de följande diagrammen finns redovisat den relativa flänseffektiviteten som funktion av  $B/L$  för de tre första belastningsfallen ovan. Balklängden  $L$  är här längden mellan momentnollpunkter, och effektiviteten gäller den punkt längs balken där belastningen är störst.

**Approximativ lösning för godt. momentfördelningar**

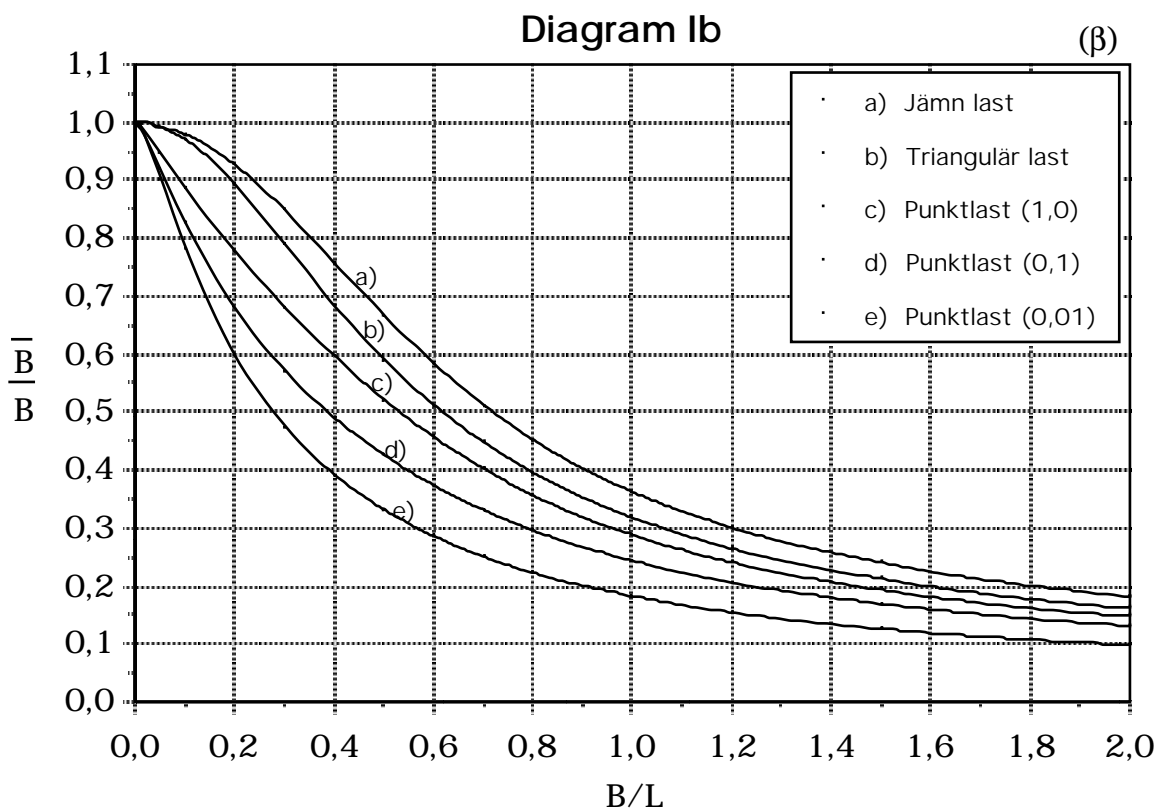
Ofta kan man genom att dela in en balk i dellängder vid momentnollpunkterna, approximativt bestämma effektiviteten utifrån dessa typfall.

Undantaget gäller ensidiga flänsar (fall V) då hänsyn måste tas till livets och plätens böjstyvhet. I detta fall är man hänvisad till att använda summationsmetoden för att få en uppfattning om flänsens effektivitet.



Effektiv fläns vid momentmax,  
Fritt upplagd balk

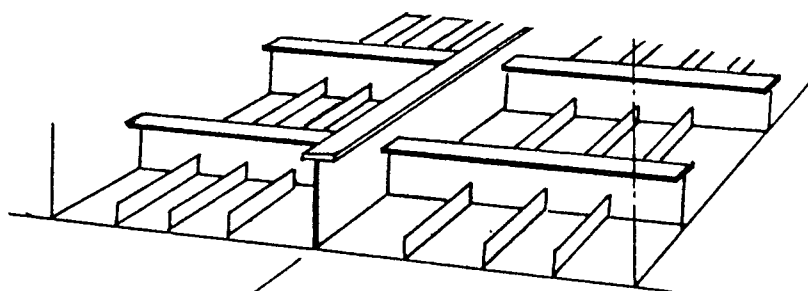
FALL I: Symmetrisk fläns med fria kanter



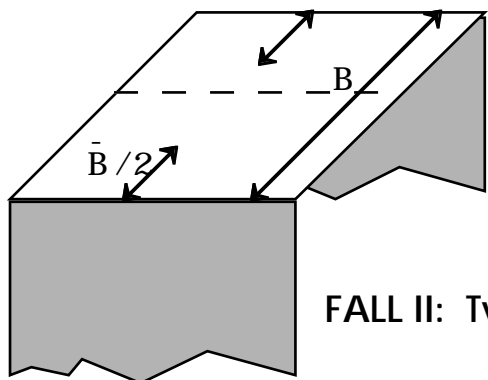
Exempel på tillämpningar:

Byggda bärande ramverk (vebbramar, vägare) i enkelskrovskonstruktioner

Förstyvningar, T-profiler (gäller även L-profiler under förutsättning att livet är förhindrat att böja ur sitt plan)



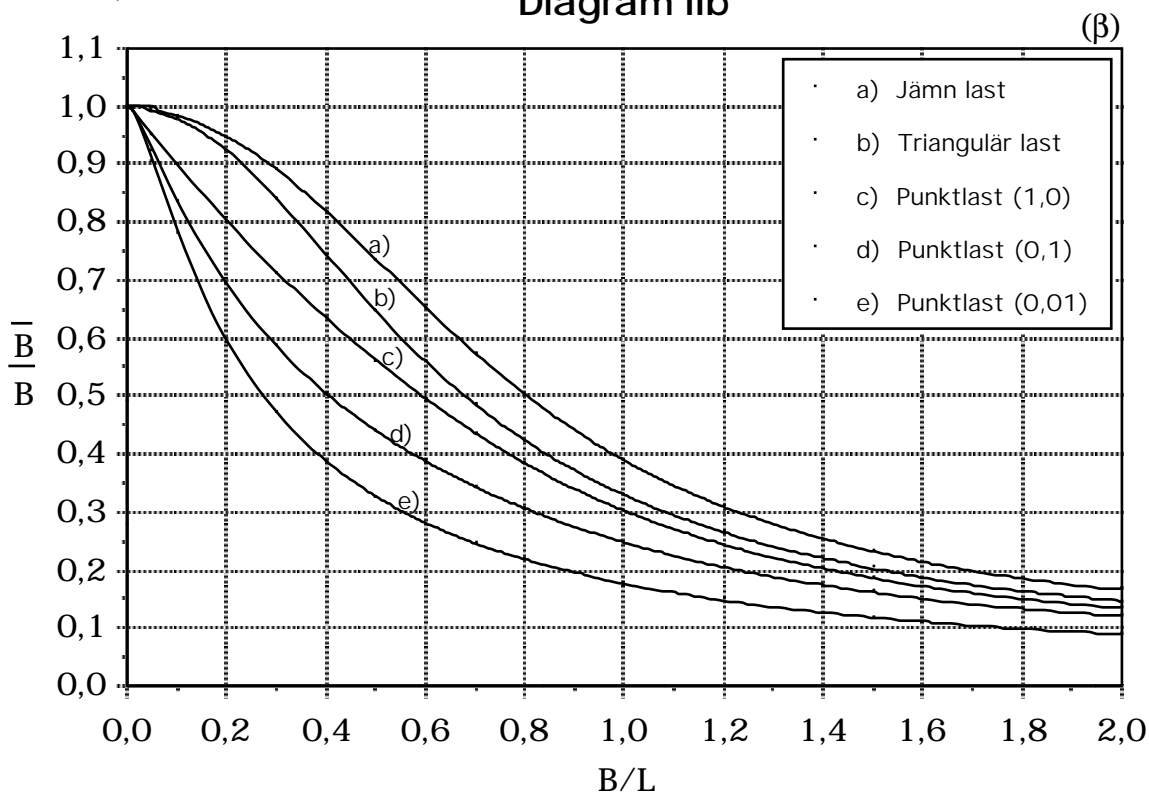




Effektiv fläns vid momentmax,  
Fritt upplagd balk

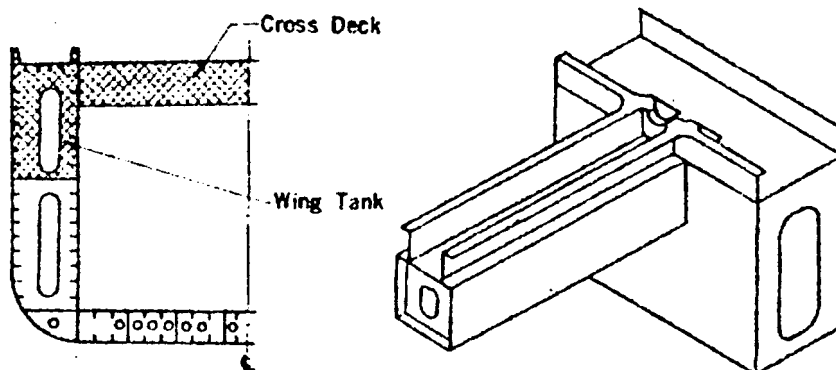
FALL II: Två livplåtar, en i vardera flänskanten

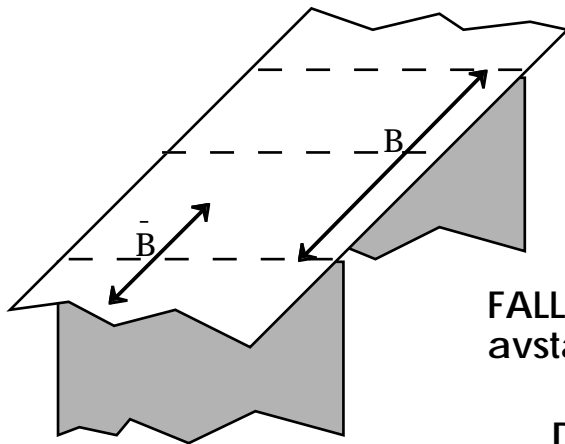
Diagram IIb



Exempel på tillämpningar:

Däckstrimlor (längskepps och tvärskepps) i öppna fartyg



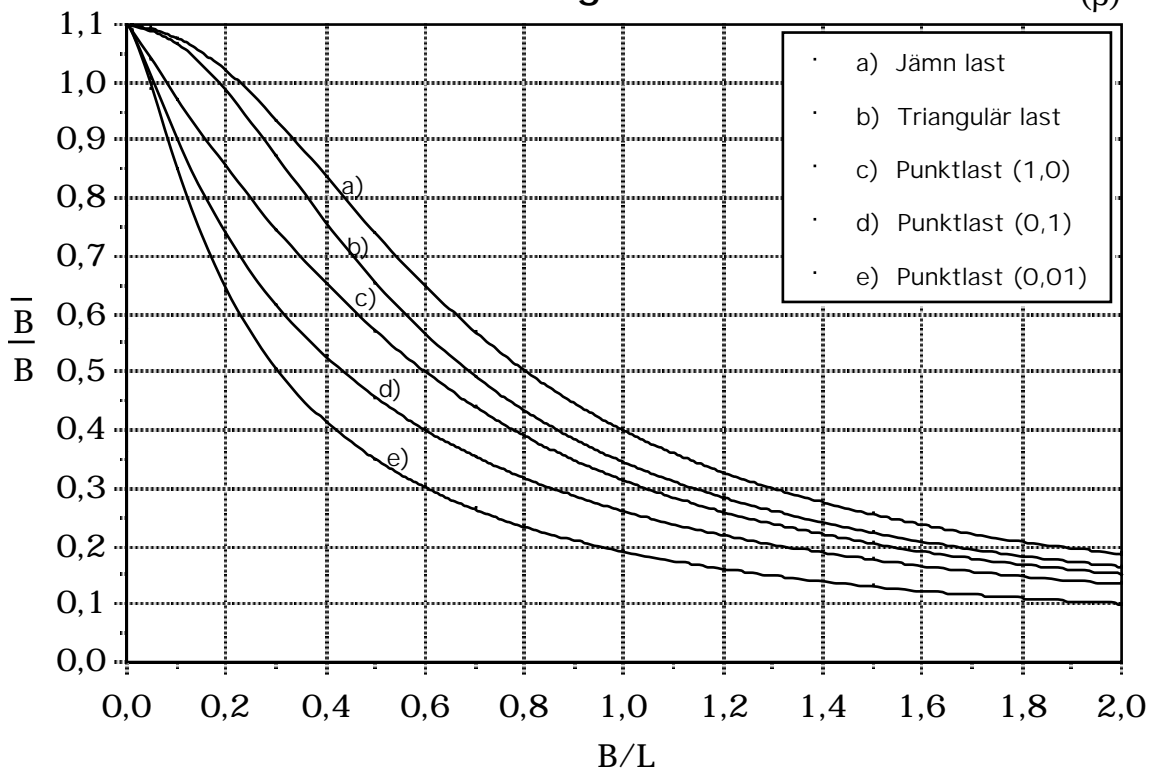


Effektiv fläns vid momentmax,  
Fritt upplagd balk

FALL III: Många livplåtar på samma  
avstånd med gemensam plåtfläns

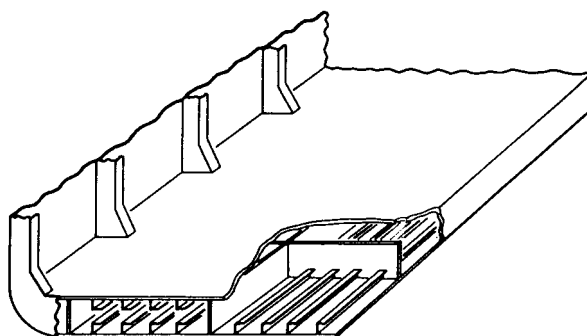
Diagram IIIb

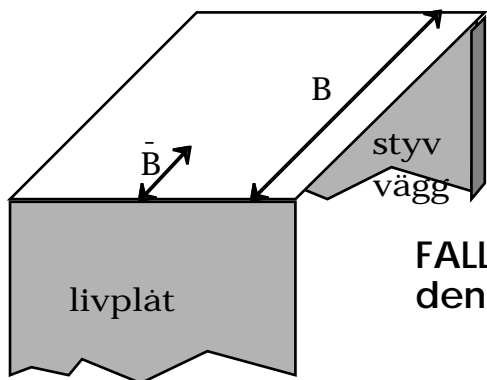
(β)



Exempel på tillämpningar:

Alla typer av förstyrade paneler, t ex dubbelbotten

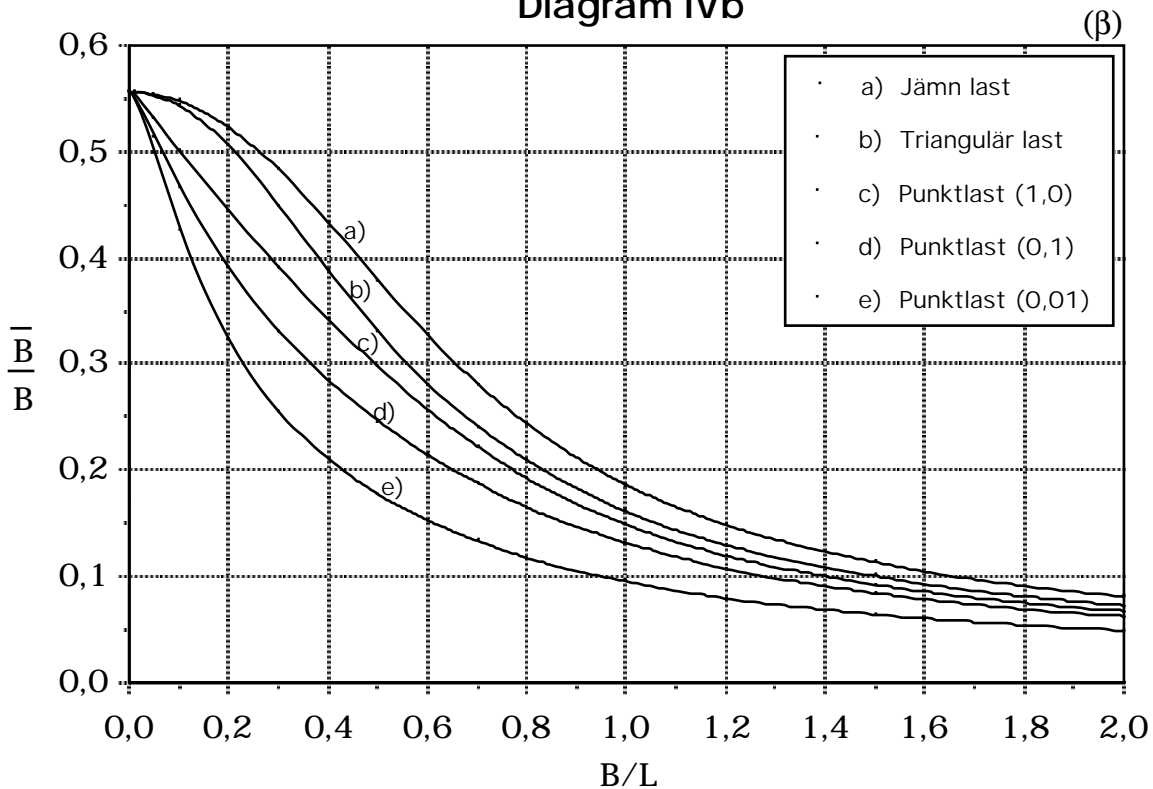




Effektiv fläns vid momentmax,  
Fritt upplagd balk

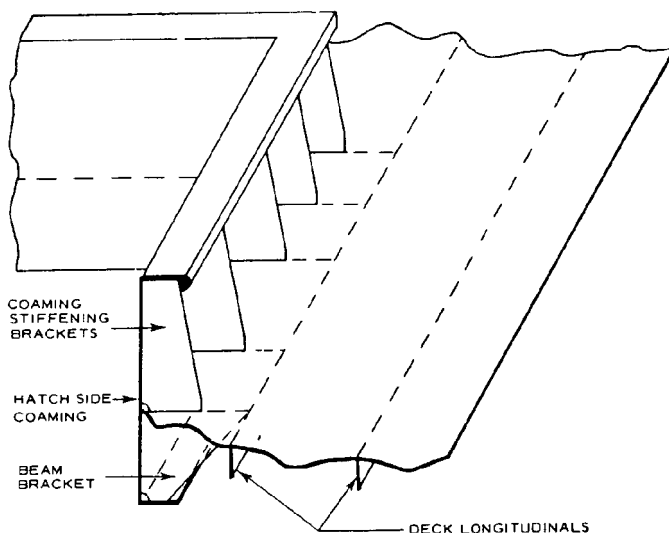
FALL IV: Flänsens ens kant vid en livplåt,  
den andra vid en styv vägg

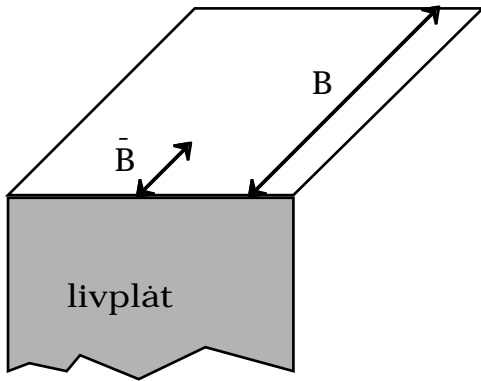
Diagram IVb



Exempel på tillämpningar:

Däck i anslutning till bordläggning eller skott

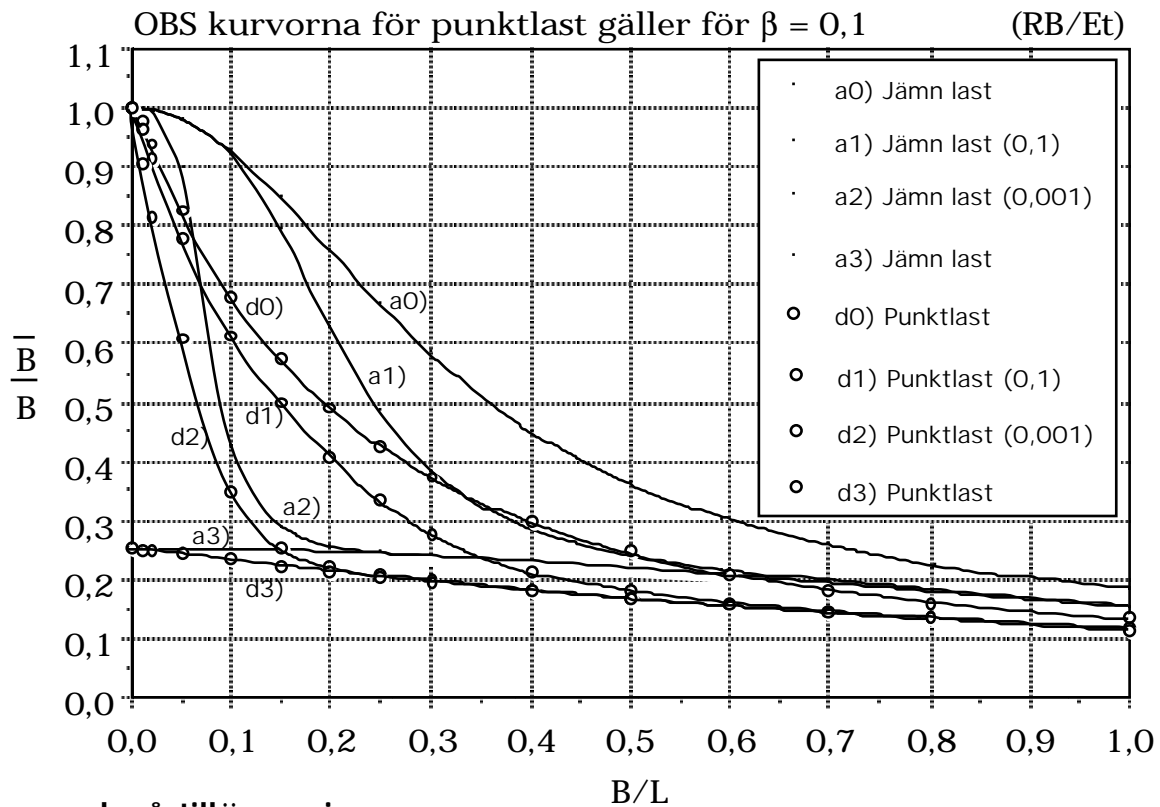




Effektiv fläns vid momentmax,  
Fritt upplagd balk

FALL V: Osymmetrisk fläns med ena kanten vid livplåten

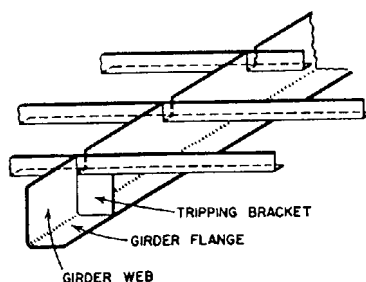
Diagram Vb



Exempel på tillämpningar:

Mycket få tillämpningar där livets utböjning är helt fri. För en noggrann analys måste man därför ta hänsyn till inspänningen vid livet (fjäderkonstant R). Diagrammet ger några exempel på inspänningens betydelse.

I de flesta fall när livet är vekt appliceras stagbrickor vilket helt förhindrar livets utböjning. Detta motsvarar  $RB/Et = \infty$  dvs kurvorna a0 och d0 ovan. (För helt förhindrad utböjning är FALL I direkt tillämpligt om dubbla flänsbredden används vid definitionen av  $B/L$ ).

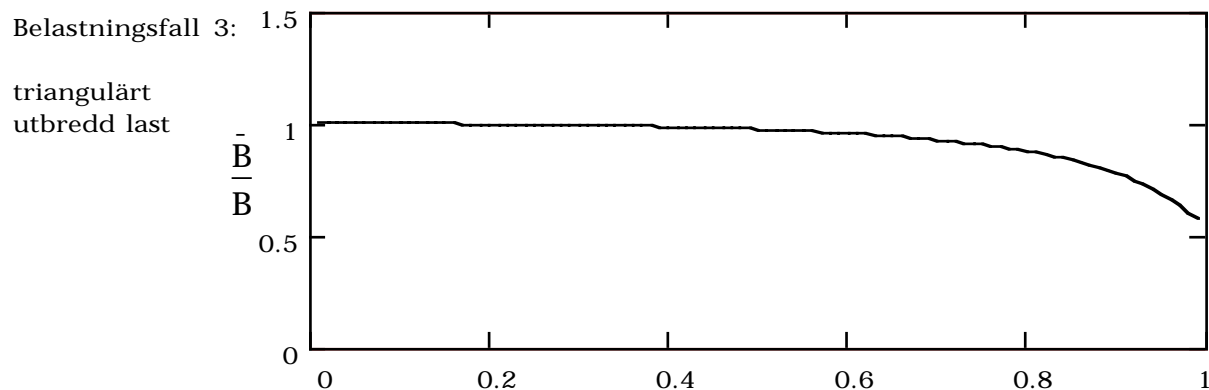
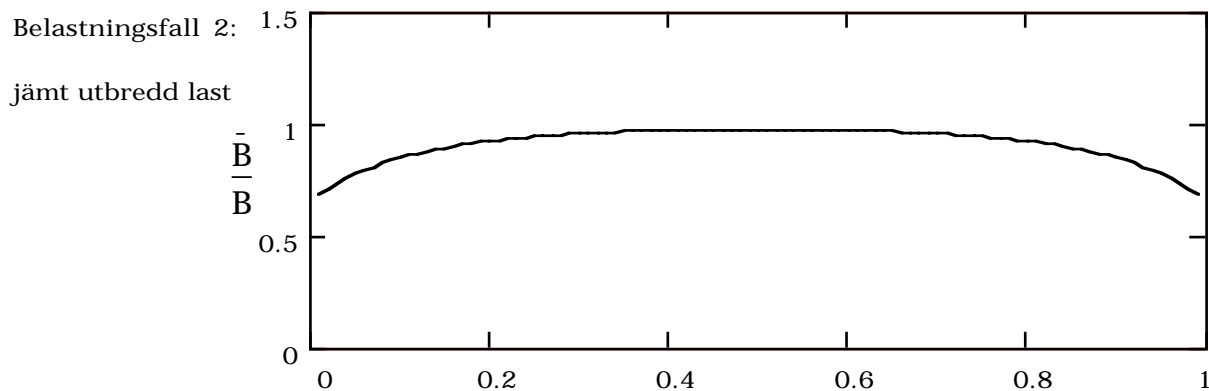
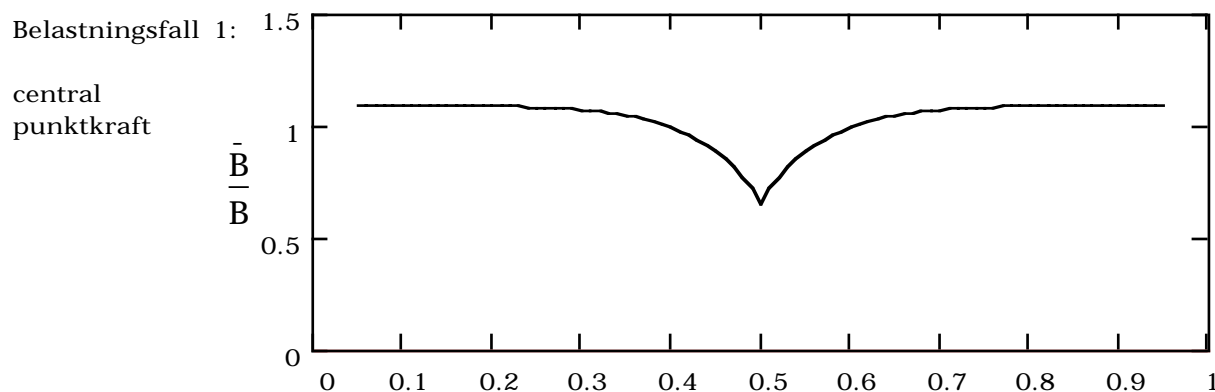


## Fördelning av effektiv fläns utefter balklängden

För dimensioneringsändamål (spänningar) används den effektiva flänsbredd som gäller för tvärsnittet vid momentmaximum.

För beräkningar av deformationer (styvhet) bör däremot en för hela balklängden mera representativ effektivitet användas. För överslag kan man här ta den konstanta effektivitet som erhålls för harmonisk belastning. Figurerna nedan visar variation av eff. flänsbredd utefter balklängden för belastningsfall 1,2 och 3. Fall III ,  $B/L = 0,25$  ,  $\beta = 0,09$

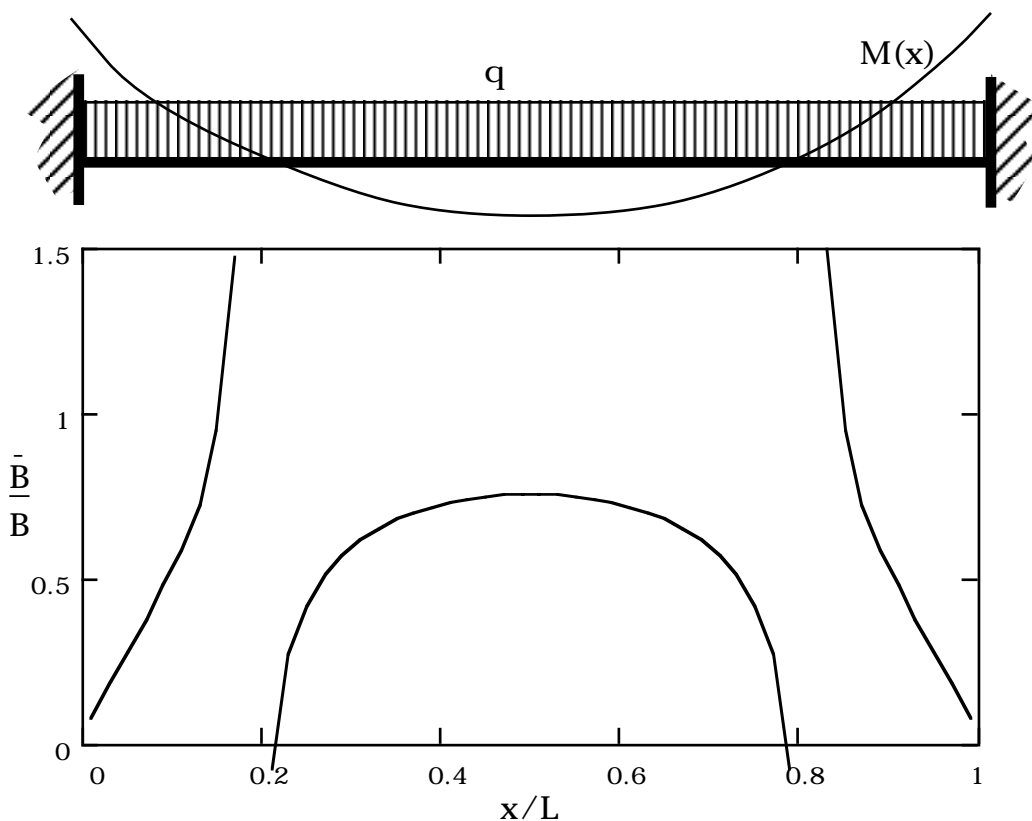
För en harmonisk belastning är den konstanta relativa effektiviteten 0,96.



## Inspända flänsar

De analytiskt framtagna värdena på flänseffektivitet utgår från att spänningarna/momenten är noll i balkarnas ändsnitt. I verkliga konstruktioner förekommer ofta någon momentinspänning i balkändarna.

För symmetriskt belastade balkar - t ex lateralt belastade förstävningar mellan primära styrkeförband (vebbar) - är inspänningen helt fast. En sådan momentfördelning kan simuleras genom att superponera belastningsfallen 2 och 6. För belastningsfall 6 är dock konvergensen mycket långsam och man tvingas räkna med ett mycket stort antal termer i Fourierserien för att erhålla en rimlig noggrannhet. Figuren nedan visar en sådan beräkning med hjälp av Mathcad med 199(!) summerade termer.



Exempel på fördelning av plåtflänsens effektivitet utefter en jämt belastad fast inspänd förstävning.

Fall III ,  $B/L = 0,25$  ,  $\beta = 0,09$

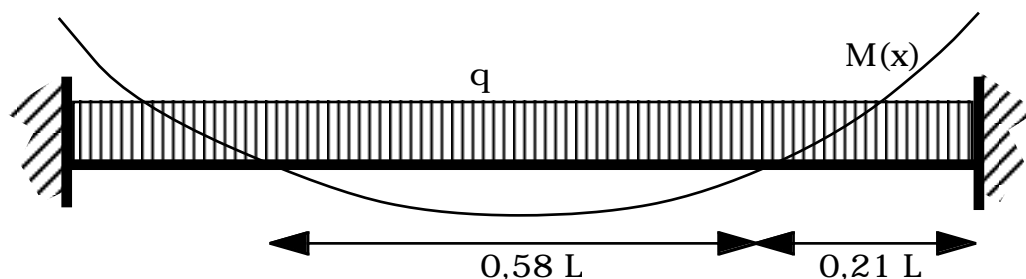
## Inspända flänsar - förenklade beräkningar

I praktiken är det inte möjligt eller motiverat att vid normalt konstruktionsarbete detaljräkna flänseffektiviteter. Vanligen nöjer man sig med att med hjälp av typfall och förenklingar skaffa sig en uppfattning om storleksordningen.

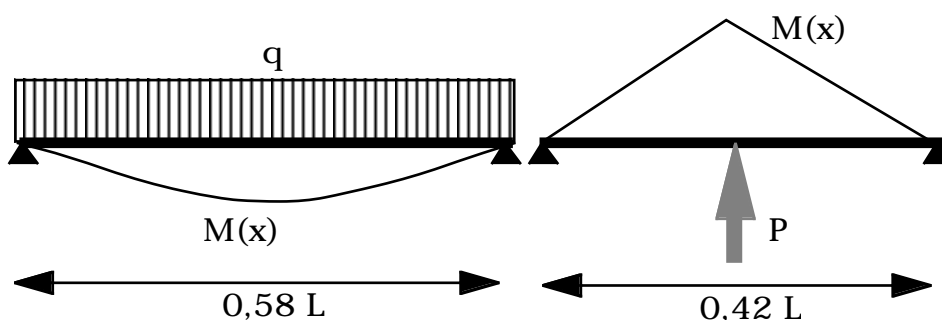
Skrovbyggnadsreglerna ger ofta vägledning om vilka antaganden som får göras vid beräkning av böjmotstånd i förstyrningar och bärande balkar.

På de följande sidorna visas några sådana exempel från DnV's klassregler och rekommendationer.

En vanlig förenkling som görs när man har fast inspända balkar, är att dela upp balken i delar mellan momentnollpunkterna och med hjälp av typfall för belastningar på fritt upplagd balk (Diagram Ib-Vb t ex) räkna effektivitet för varje del separat.



Kan approximeras med följande två typlastfall:



Den effektiva flänsbredden mitt på balken resp vid infästningen kan direkt läsas ur diagram med det  $B/L$ -förhållande som gäller för resp delbalk.

## Effektiv fläns i praktiken

### Utdrag ur *Ships' Load and Strength Manual*, DnV 1978

89

Section 6

**104** Calculations according to the beam theory can normally be used. However, for girders with high webs, bracket areas etc., where the beam theory will not give reliable results, a finite element analysis or other equivalent method should be applied to determine the stress distribution in the structure.

#### C 200 Effective flange

**201** The effective plate flange to be taken into account by beam analysis should be assessed on the basis of:

- the stiffness response of the structure
- the distribution of stresses due to axial forces and bending moments.

**202** In double panels, e.g. double bottom, double sides and double bulkheads (having systems of crossing girders), the plate flange can be taken as 100 % effective for the stiffness estimation and for the calculation of the stress distribution outside the supports.

**203** In girders and systems of crossing girders having plane plate flanges, the effective width  $b_e$  for the stiffness estimation and the calculation of the stress distribution outside the supports, is given as:

$$b_e = \left[ 1 - \left( \frac{7 - \ell/b}{7} \right)^3 \right] \text{ and max. } b_e = b$$

Normally it will be sufficiently accurate to take

$b_e = b$  for  $\ell/b \geq 5$ .

$b$  full width of the plate flange, i.e. the sum of half the distances to the nearest parallel girder on both sides.

$\ell$  span of girder between the points of zero bending moment (or twice the distance from free end to support of cantilever, see 204).

Normally,  $\ell \approx 0,9$  times span between effective supports may be used.

**204** For cantilevers and girders with 1 or 2 concentrated loads, the effective width  $b_e$  for the stiffness estimation and the calculation of the stress distribution outside the supports and points of concentrated loads, is given as:

$$b_e = b \left[ 1 - \left( \frac{10 - \ell/b}{10} \right)^2 \right] \text{ and max. } b_e = b$$

Normally it will be sufficiently accurate to take  $b_e = b$  for  $\ell/b \geq 8$ .

**205** For plate flanges having corrugations parallel to the girder, the effective width  $b_e$  of the flange is as given in 203 and 204. If the corrugations are perpendicular to the direction of the girder, the effective width should not be taken greater than 10 % of the values derived from 203 and 204.

**206** For calculation of the stress distribution at the supports, the effective width of the flange is assessed on the basis of the structural design with regard to transfer of bending moments and axial forces.

**207** When the complete hull girder or bottom structures are analysed as grillage systems, 100 % of the plating of the hull girder can be regarded as effective for the stiffness estimation,



## Effektiv fläns i praktiken

### Utdrag ur DnVs klassregler 1994 (Part 3, Ch.1)

#### C 400 Effective flange of girders.

401 The section modulus of the girder is to be taken in accordance with particulars as given in the following. Structural modelling in connection with direct stress analysis is to be based on the same particulars when applicable. Note that such structural modelling will not reflect the stress distribution at local flange cut-outs or at supports with variable stiffness over the flange width. The local effective flange which may be applied in stress analysis is indicated for construction details in various Classification Notes on «Strength Analysis of Hull Structures».

402 The effective plate flange area is defined as the cross-sectional area of plating within the effective flange width. Continuous stiffeners within the effective flange may be included. The effective flange width  $b_e$  is determined by the following formula:

$$b_e = C b \quad (\text{m})$$

C = as given in Table C2 for various numbers of evenly spaced point loads (r) on the span.

b = sum of plate flange width on each side of girder, normally taken to half the distance from nearest girder or bulkhead.

a/b	0	1	2	3	4	5	6	≥ 7
C(r ≥ 6)	0,00	0,38	0,67	0,84	0,93	0,97	0,99	1,00
C(r = 5)	0,00	0,33	0,58	0,73	0,84	0,89	0,92	0,93
C(r = 4)	0,00	0,27	0,49	0,63	0,74	0,81	0,85	0,87
C(r ≤ 3)	0,00	0,22	0,40	0,52	0,65	0,73	0,78	0,80

a = distance between points of zero bending moments.  
= S for simply supported girders.

= 0,6 S for girders fixed at both ends.

r = number of point loads.

403 For plate flanges having corrugations parallel to the girder, the effective width is as given in 402. If the corrugations are perpendicular to the direction of the girder, the

effective width should not be taken greater than 10% of the value derived from 402.

404 For effective width of plate flanges subject to elastic buckling, see Sec.14 and Appendix A.

405 The effective width of curved plate flanges is to be specially considered.

406 The effective plate area is not to be less than the effective area of the face plate within the following regions:

- Ordinary girders: Total span.
- Continuous hatch side coamings and hatch end beams: Length and breadth of the hatch, respectively, and an additional length of 1 m at each end of the hatch corners.

407 The effective area of curved face plates is given by:

$$A_e = k t_f b_f \quad (\text{mm}^2)$$

$b_f$  = total face plate breadth in mm.

k = flange efficiency coefficient, see also fig.10.

$$= k_1 \frac{\sqrt{r t_f}}{b}$$

$$= 1,0 \text{ maximum}$$

$$k_1 = \frac{0,643 (\sinh \beta \cosh \beta + \sin \beta \cos \beta)}{\sinh^2 \beta + \sin^2 \beta}$$

for symmetrical and unsymmetrical free flanges.

$$= \frac{0,78 (\sinh \beta + \sin \beta) (\cosh \beta - \cos \beta)}{\sinh^2 \beta + \sin^2 \beta}$$

for box girder flange with two webs.

$$= \frac{1,56 (\cosh \beta - \cos \beta)}{\sinh \beta + \sin \beta}$$

for box girder flange with multiple webs.

$$\beta = \frac{1,285 b}{\sqrt{r t_f}} \quad (\text{rad})$$

b = 0,5 ( $b_f - t_w$ ) for symmetrical free flanges.

=  $b_f$  for unsymmetrical free flanges.

= s -  $t_w$  for box girder flanges.

s = spacing of supporting webs for box girder (mm).

$t_f$  = face plate thickness in general (mm).

=  $t_w$  (maximum) for unsymmetrical free flanges.

$t_w$  = web plate thickness (mm).

r = radius of curved face plate (mm)

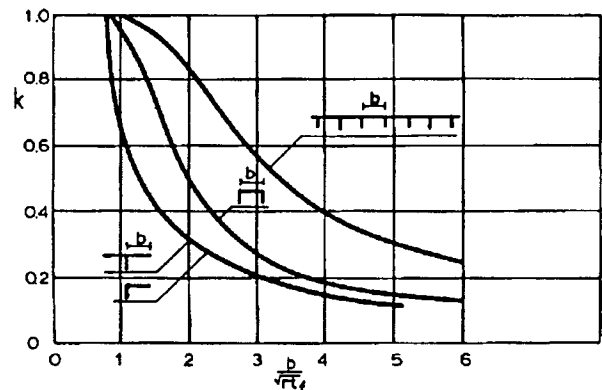


Fig. 10  
Effective width of curved face plates for alternative boundary conditions.

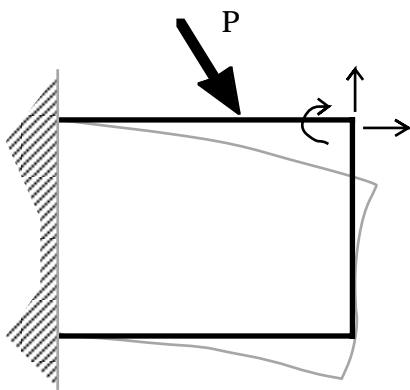
## Balksystem

Balkar som konstruktionselement sitter oftast sammanfogade i system där deras bärförmåga bestäms både av den egna geometrin och styvheten, och av det omgivande systemets inflytande i form av inspänningskrafter och påtvingade deformationer.

Även om balkar generellt har styvhet i alla riktningar byggs de normalt för att ha sin huvudsakliga lastupptagning i ett plan.

Två typer av böjstyva balksystem brukar kunna särskiljas:

### Ramverk

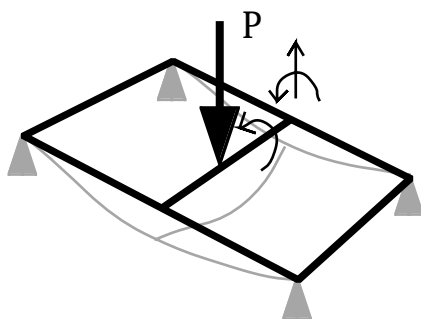


är ett system av böjstyva balkar förenade med stela knutpunkter och belastade med krafter och böjmoment i systemets plan. Varje knutpunkt har *3 frihetsgrader*: 2 förskjutningar i planets huvudriktningar + 1 rotation.

En typisk ramverkskonstruktion i ett fartyg är vebbramen som bildas av däckstransversaler, sidovebbar och bottenstockar. Belastningen utgörs här av yttre hydrostatiskt tryck samt däckslaster.

### Gallerverk

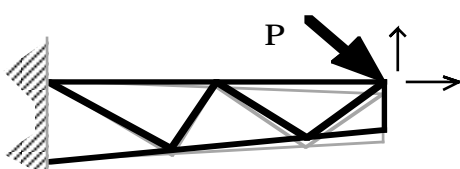
är ett system av böjstyva balkar belastade med krafter och böjmoment ur sitt eget plan (lateralt). Varje knutpunkt har även här *3 frihetsgrader*: 1 förskjutning ur planet + 2 rotationer runt planets huvudaxlar.



Bottenkonstruktionen i fartyg är ett typiskt gallerverk bestående av bottenvägare och bottenstockar, lateralt belastat av det yttre hydrostatiska trycket.

Observera att samma balk kan ingå som komponent i ett ramverk och ett gallerverk, t ex bottenstockarna i exemplen ovan.

### Fackverk



kallas ett system av stänger (balkar med enbart axiell lastupptagning) inbördes förenade med *leder* (ingen momentöverföring).

Ett plant fackverk har 2 frihetsgrader (förskjutningar i planet) i varje knutpunkt.

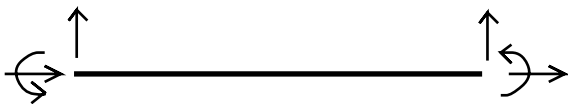
## Allmänt om beräkning av balksystem

### Statik

Balksystem är normalt statiskt obestämda. Detta innebär att reaktionsstorheterna inte direkt kan lösas ur jämviktsvillkor. Graden av statisk obestämdhet = antal reaktioner - antal oberoende jämviktsvillkor. För ett plant problem kan max 3 oberoende jämviktsvillkor formuleras.

### Kinematik

Kinematisk obestämdhet (frihetsgrader) brukar användas för att beteckna hur många förskjutningskomponenter i balksystemets knutpunkter som måste bestämmas för att fullständigt kunna lösa ut snittkrafter, deformationer och spänningar i systemet.



En balk i x-y-planet har i allmänhet 6 frihetsgrader. Antalet frihetsgrader minskar med fasta randvillkor, medan graden av statisk obestämdhet samtidigt ökar.

### Superpositionsprincipen

En struktur som belastas med ett antal krafter deformeras som summan av deformationerna från varje enskild kraft  
alternativt

En deformerad strukturs snittstorheter och inspänningskrafter är lika med summan av snittstorheterna för varje förskjutningskomponent som tillsammans ger det deformerade tillståndet.

Superpositionsprincipen är helt grundläggande för behandling av linjärt-elastiska strukturer. Både lastfallet och deformationstillståndet kan alltså delas upp i godtyckliga komponenter (som uppfyller strukturens allmänna geometriska villkor) så länge summan av komponenterna motsvarar det verkliga tillståndet.

En fullständig analys av ett balksystem kan sägas bestå av två olika delar:

### Strukturmekanik

innefattar bestämning av snittstorheter (moment och tvärkrafter) och förskjutningar som funktion av systemets belastningar och randvillkor.

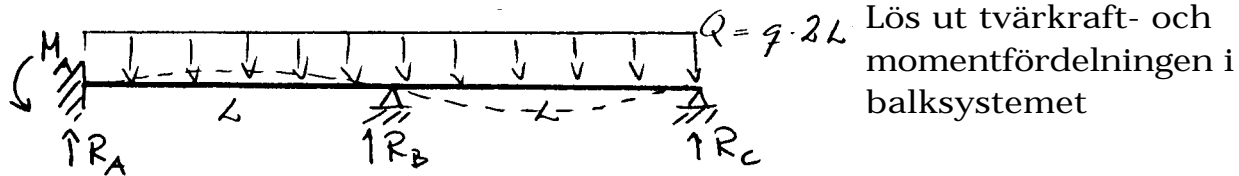
### Hållfasthetsläran

innefattar bestämning av spänningstillståndet som svarar mot snittstorheterna, samt risken för kollaps (flytning, brott, knäckning) vid det aktuella spänningstillståndet.

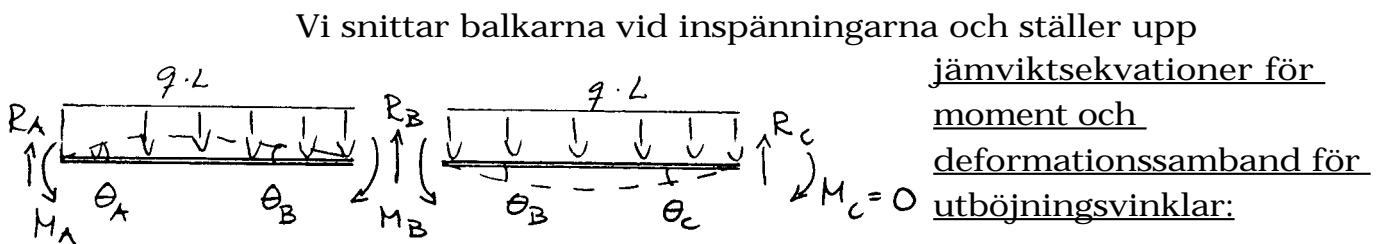
## Lösningsmetoder för balksystem

Enkla statistiskt obestämda balksystem kan lösas direkt med hjälp av jämviktsvillkor och deformationssamband (ur elementarfallstabeller) kombinerat med geometriska (kompatibilitets-) villkor.

### Exempel: "Vinkeländringsmetoden"



Lös ut tvärkraft- och momentfördelningen i balksystemet



Vi snittar balkarna vid inspänningarna och ställer upp

jämviktsekvationer för

moment och

deformationssamband för

utböjningsvinklar:

Jämvikt:

$$M_B = M_A - R_A \cdot L + q \cdot \frac{L^2}{2}$$

$$M_B = -R_C \cdot L + q \cdot \frac{L^2}{2}$$

(3 oberoende jämviktsekvationer)

$$R_A + R_B + R_C = 2 \cdot q \cdot L$$

Deformationsamband ur elementarfall:

$$\theta_B = \frac{M_B \cdot L}{3 \cdot E \cdot I} + \frac{M_A \cdot L}{6 \cdot E \cdot I} - \frac{q \cdot L^3}{24 \cdot E \cdot I}$$

$$\theta_B = \frac{-M_B \cdot L}{3 \cdot E \cdot I} + \frac{q \cdot L^3}{24 \cdot E \cdot I}$$

$$\} \text{ ger } M_A = \frac{1}{2} \cdot q \cdot L^2 - 4 \cdot M_B$$

(ytterligare 2 ekvationer)

$$\theta_A = \frac{M_A \cdot L}{3 \cdot E \cdot I} + \frac{M_B \cdot L}{6 \cdot E \cdot I} - \frac{q \cdot L^3}{24 \cdot E \cdot I} = 0$$

$$\text{ ger } M_B = \frac{1}{4} \cdot q \cdot L^2 - 2 \cdot M_A$$

Tillsammans ger detta oss de nödvändiga ekvationerna för att lösa ut:

$M_A = \frac{1}{14} \cdot q \cdot L^2$	$R_A = \frac{13}{28} \cdot q \cdot L$	$R_C = \frac{11}{28} \cdot q \cdot L$
$M_B = \frac{3}{28} \cdot q \cdot L^2$	$R_B = \frac{8}{7} \cdot q \cdot L$	

Exempel "Vinkeländringsmetoden" forts:

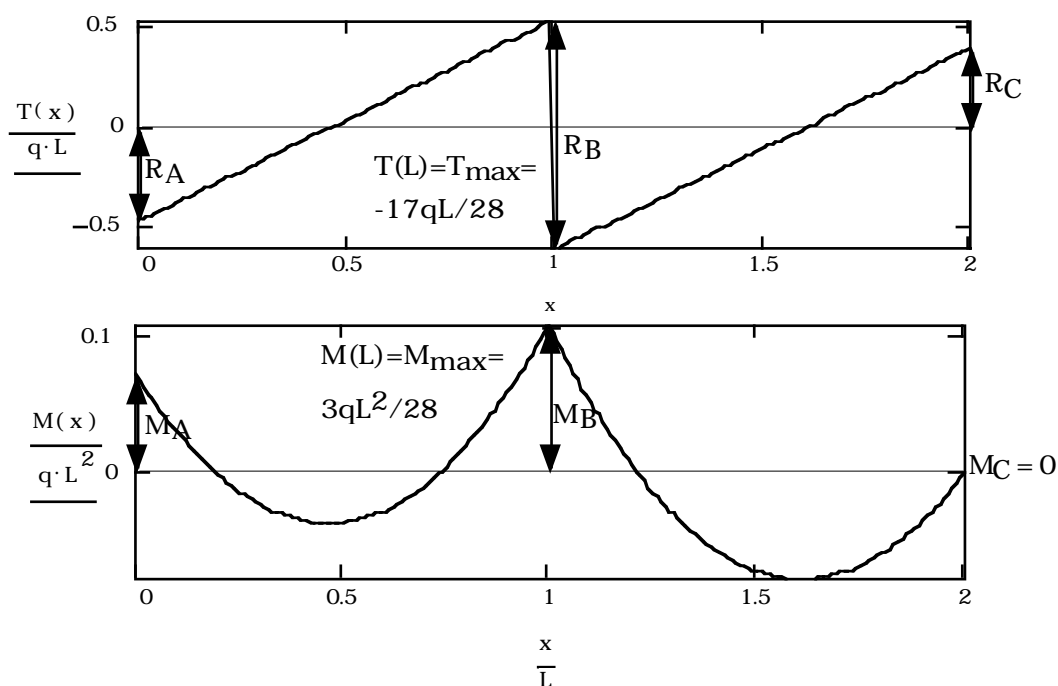
När samtliga reaktionskrafter nu är kända kan snittstorheterna integreras fram:

$$T(x) := - \int_0^x (-q) dx - R_A + \text{if}(x \geq L, -R_B, 0)$$

$$T(x) := q \cdot x - R_A + \text{if}(x \geq L, -R_B, 0)$$

$$M(x) := \int_0^x T(x) dx + M_A$$

$$M(x) := M_A + \frac{1}{2} \cdot q \cdot x^2 - R_A \cdot x + \text{if}(x \geq L, -R_B \cdot (x - L), 0)$$



Sammanfattning:

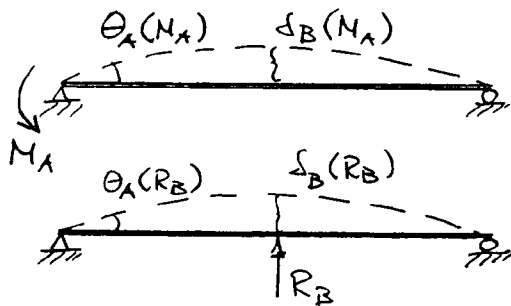
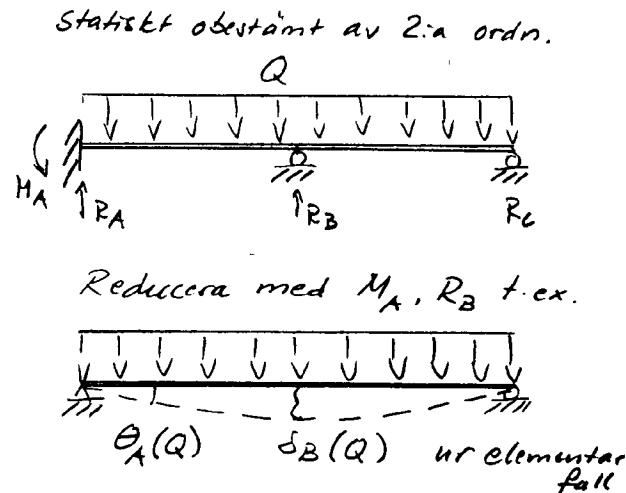
1. Balksystemet snittas i varje reaktionspunkt
2. Jämviktsekvationer + elementarfallssamband mellan snittmoment och knutpunktsrotationer ställs upp
3. Geometrisk kompatibilitet gör ekvationssystemet lösbart och reaktionsstorheterna kan bestämmas.
4. Snittstorheterna integreras fram ur reaktioner och yttre last.

## Generella lösningsmetoder för balksystem

### "Kraftmetoden"

bygger på att man håller nere antalet obekanta genom att utnyttja sammansatta elementarfall så långt som möjligt:

#### Lösningsmetodik:



$$\begin{cases} \theta_A(Q) + \theta_A(M_A) + \theta_A(R_B) = \theta_A = 0 \\ \delta_B(Q) + \delta_B(M_A) + \delta_B(R_B) = \delta_B = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{M_A(Q)} \text{ och } \underline{R_B(Q)}$$

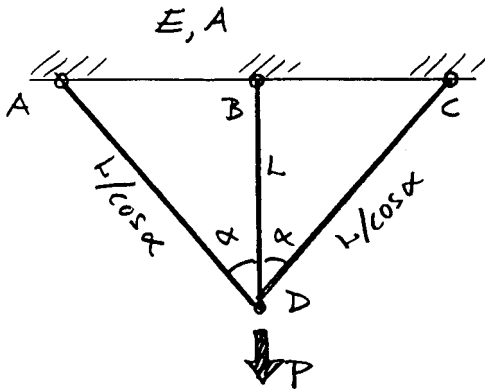
$$\Rightarrow \underline{R_A(Q)} \text{ och } \underline{R_C(Q)}$$

- 1 Balksystemet reduceras genom att ta bort randvillkor (inspänningar-reaktionskrafter) så att statisk bestämbarhet uppnås.
- 2 Deformationer pga yttre last beräknas för det reducerade systemet i samtliga punkter där de reducerade randvillkoren angrep systemet.
- 3 Deformationer som funktion av de reducerade reaktionskrafterna beräknas på motsvarande sätt i punkter de reducerade randvillkoren angrep systemet.
- 4 Superponering av 2 och 3 ovan samt koppling till de ursprungliga randvillkoren ger ett linjärt ekvationssystem med *lika många obekanta som man hade statisk obestämbarhet*. De reducerade reaktionskrafterna kan beräknas.
- 5 Jämviktsvillkor ger övriga reaktionskrafter, varefter snittstorheterna i systemet kan lösas ut.

Kraftmetodens fördelar är att det blir förhållandevis få obekanta att lösa ut (antalet statiskt obestämda är vanligen betydligt lägre än antalet frihetsgrader).

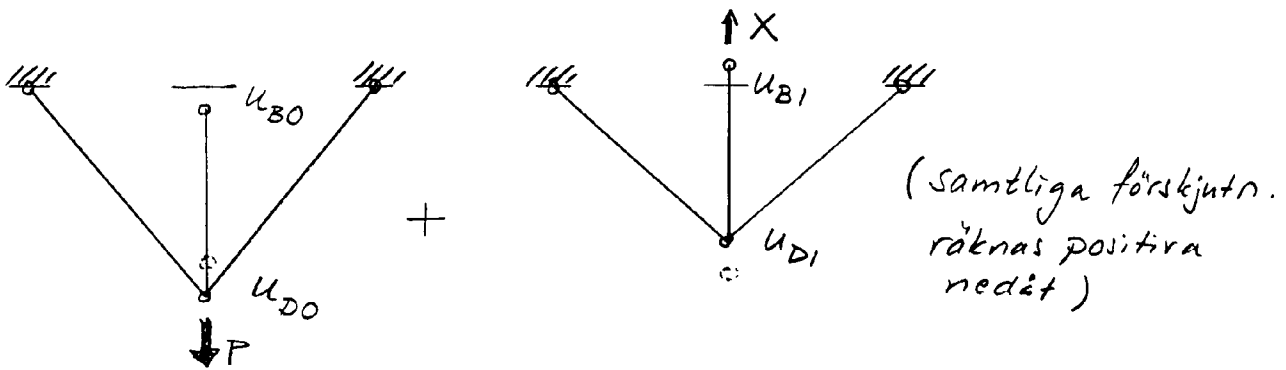
Nackdelarna är att det för mera komplicerade balksystem blir svårt att systematisera mom 2 och 3 ovan.

Exempel på användning av kraftmetoden  
Enkelt statistiskt obestämt fackverk

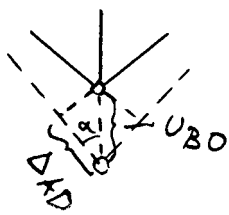


Beräkna förskjutningen i punkten D

1. Inspänningarna reduceras så att systemet blir statistiskt bestämt. Snitta t ex i BD.

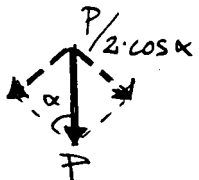


2. Beräkna förskjutningen  $u_{B0}$  pga den yttre lasten P



$$u_{B0} = u_{D0} = \frac{\Delta_{AD}}{\cos(\alpha)} = \frac{\Delta_{CD}}{\cos(\alpha)} \quad (\text{symmetri})$$

Enaxligt spänningstillstånd ger



$$P_{AD} = \epsilon \cdot E \cdot A = \frac{\Delta_{AD}}{L} \cdot \cos(\alpha) \cdot E \cdot A = -\frac{P}{2 \cdot \cos(\alpha)}$$

vilket ger

$$\Delta_{AD} = \frac{P \cdot L}{2 \cdot E \cdot A \cdot \cos(\alpha)^2} \quad \text{och} \quad u_{B0} = u_{D0} = \frac{P \cdot L}{2 \cdot E \cdot A \cdot \cos(\alpha)^3}$$

3. Beräkna förskjutningarna pga reducerad reaktionskraft X analogt med 2 ovan erhålls:

$$u_{D1} = \frac{-X \cdot L}{2 \cdot E \cdot A \cdot \cos(\alpha)^3} \quad u_{B1} = \frac{-X \cdot L}{2 \cdot E \cdot A \cdot \cos(\alpha)^3} - \frac{X \cdot L}{E \cdot A}$$

Exempel på kraftmetoden forts:

4. Superponera 2 och 3 samt koppla till randvillkoret  $u_B = 0$  (en ekvation, en obekant!) ger  $X$

$$u_{B1} + u_{B0} = 0$$

$$\frac{P \cdot L}{2 \cdot E \cdot A \cdot \cos(\alpha)^3} + \left( \frac{-X \cdot L}{2 \cdot E \cdot A \cdot \cos(\alpha)^3} - \frac{X \cdot L}{E \cdot A} \right) = 0 \quad \text{ger}$$

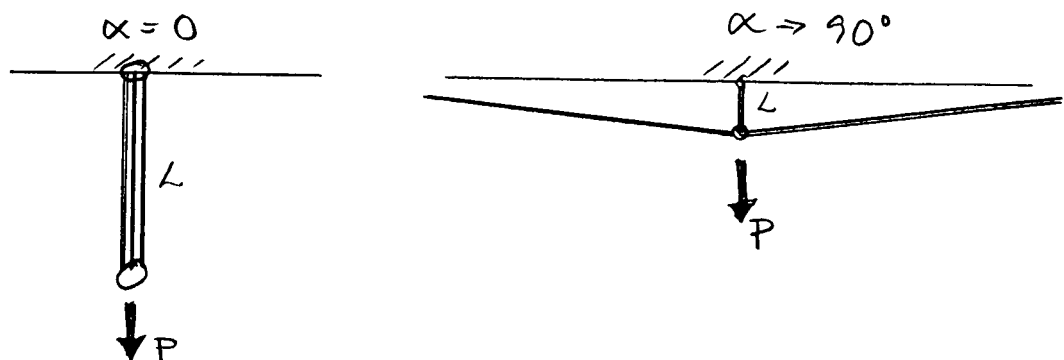
$$X = \frac{P}{1 + 2 \cdot \cos(\alpha)^3}$$

5. Nu är övriga reaktionsstorheter möjliga att bestämma med jämviktsvillkor (och symmetri). I vårt fall frågades efter förskjutningen som direkt kan fås genom att superponera uttrycken från 2 och 3.

$$u_D = u_{D0} + u_{D1} = \frac{P \cdot L}{2 \cdot E \cdot A \cdot \cos(\alpha)^3} + \frac{-\frac{P}{1 + 2 \cdot \cos(\alpha)^3} \cdot L}{2 \cdot E \cdot A \cdot \cos(\alpha)^3}$$

$$u_D = \frac{P}{E \cdot A} \cdot \frac{L}{1 + 2 \cdot \cos(\alpha)^3}$$

Här ser vi att för  $\alpha = 0$  kommer alla tre stängerna att ge "full" axiell styvhet till systemet och  $u_D = PL/3EA$ , medan för  $\alpha = 90^\circ$  kommer bara den centrala stängerna att bära och vi får  $u_D = PL/EA$



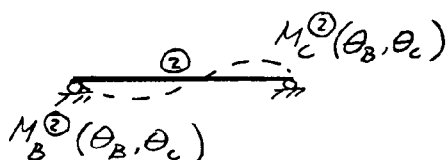
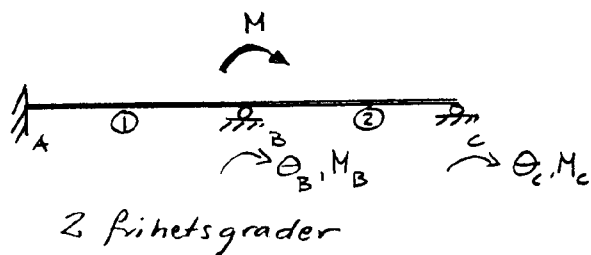


## Generella lösningsmetoder för balksystem

### "Förskjutningsmetoden"

bygger på att man delar upp systemet i delbalkar för vilka man kan använda enkla samband mellan förskjutningar och laster:

Lösningsmetodik:



$$\begin{cases} M_B^1(\theta_B) + M_B^2(\theta_B, \theta_C) = M \\ M_C^2(\theta_B, \theta_C) = 0 \end{cases}$$

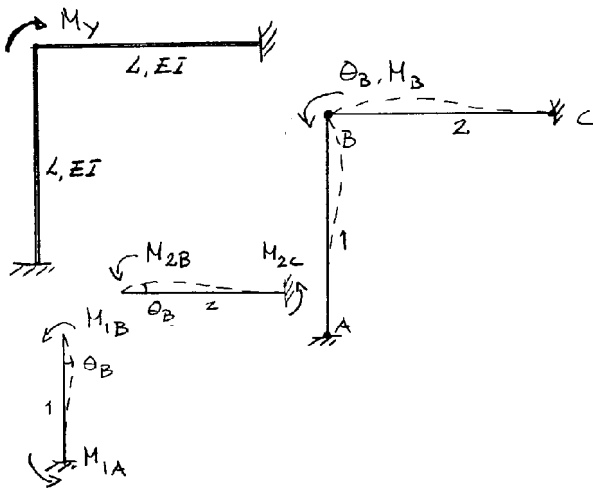
$$\Rightarrow \underline{\theta_B(M) \text{ och } \theta_C(M)}$$

$$M_A^1(M), M_B^1(M), M_B^2(M), M_C^2(M)$$

- 1 Balksystemets frihetsgrader och därtillhörande knutpunktskrafter numreras systematiskt. Balksystemet delas upp i delbalkar mellan knutpunkterna.
- 2 För varje balkelement bestäms sambandet mellan förskjutningar och krafter i knutpunkterna ("styvheten")
- 3 Genom superponering av bidragen från varje balkelement erhålls balksystemets styvhetsrelation, ett linjärt ekvationssystem med *lika många obekanta som antal frihetsgrader* i systemet.
- 4 Insättning av de yttre knutpunktskrafterna (eller ekvivalenta d:o) ger möjlighet att lösa ut förskjutningarna i systemets samtliga knutpunkter.
- 5 Med kända förskjutningar i knutpunkterna erhålls snittkrafter i balkelementen genom att utnyttja 2 ovan.

Förskjutningsmetodens fördelar är att det blir mycket enkelt att systematisera beräkningarna (i matrisform) och det blir därför enkelt att lösa även komplicerade problem med hjälp av datorer. Antalet obekanta (frihetsgraderna) blir dock snabbt stort och metoden har begränsad användning som handräkningsmetod.

## Exempel på användning av förskjutningsmetoden Enkelt ramverk med en frihetsgrad



1 Om vi försummar alla axiella töjningar i balksystemet får det bara en frihetsgrad - rotation i nod B - vi kallar den för  $\Theta_B$ , motsvarande system-moment kallar vi för  $M_B$ . Systemet består av två element, 1 (AB) resp 2 (BC)

2 Sambandet mellan moment och rotation för varje balkelement hämtar vi ur elementarfall. (Det kommer också att uppstå tvärkrafter i balkarna, men dessa bryr vi oss inte om i detta exempel)

3 Systemmomentet får bidrag från båda balkelementen. Systemets rotation kan nu lösas som funktion av systemets moment och styvhet.

4 Insättning av den yttre lasten ger rotationens belopp

5 Snittmomentfördelningen i de båda balkarna erhålls om vi sätter in den nu kända rotationen i uttrycken 2 ovan.

$$M_{1A} = \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} \cdot \Theta_B \quad M_{1B} = \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \cdot \Theta_B$$

$$M_{2B} = \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \cdot \Theta_B \quad M_{2C} = \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} \cdot \Theta_B$$

$$M_B = M_{1B} + M_{2B} = \frac{8 \cdot E \cdot I}{L} \cdot \Theta_B$$

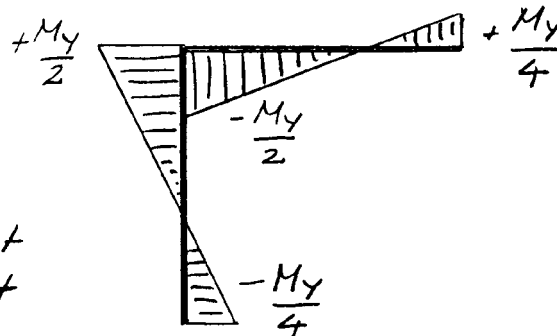
$$\Theta_B = \frac{M_B \cdot L}{8 \cdot E \cdot I}$$

$$M_B = -M_Y \quad \Theta_B = \frac{-M_Y \cdot L}{8 \cdot E \cdot I}$$

$$M_{1A} = \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} \cdot \Theta_B = \frac{-M_Y}{4}$$

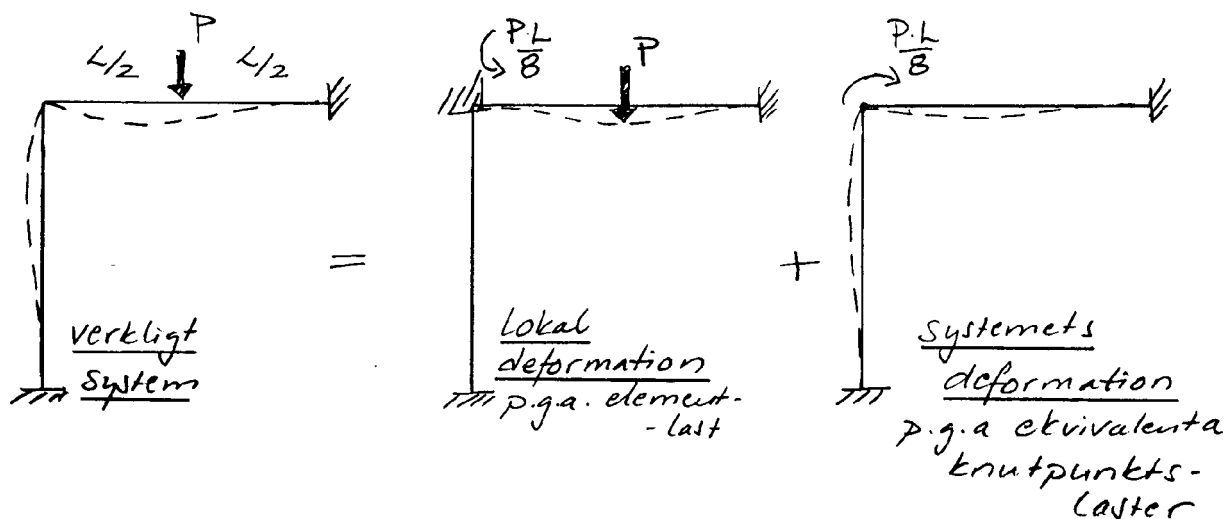
etc

Obs!  
Skillnaden mellan  
knutpunkts moment  
och snittmoment



Exempel på förskjutningsmetoden forts:

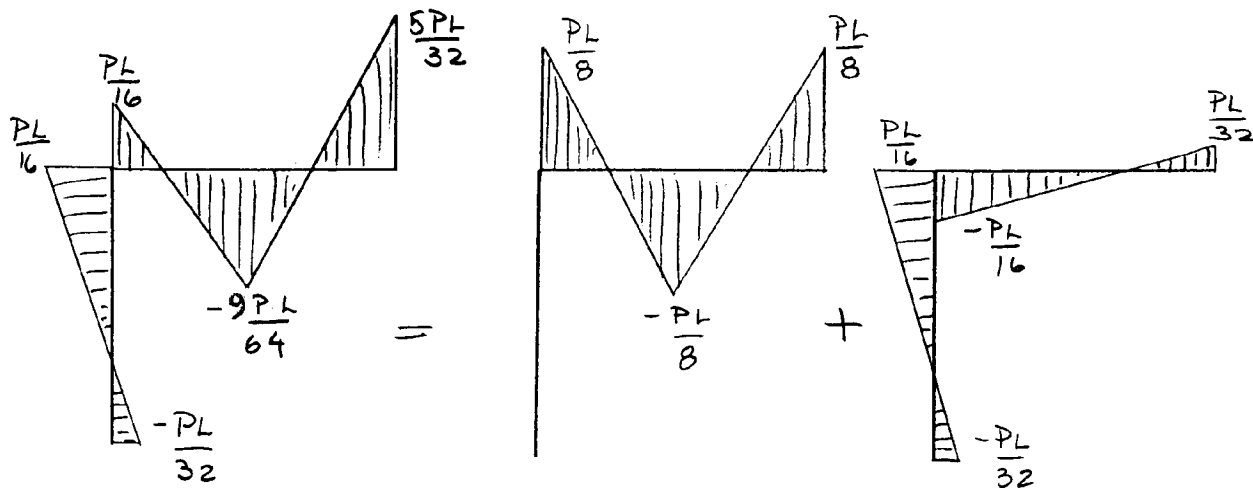
Då de yttre lasterna angriper på ett balkelement mellan noder i systemet, får man beräkna en ekvivalent nodlast som ger samma förskjutning av systemet som den verkliga lasten:



Enligt exemplet på föregående sida har vi

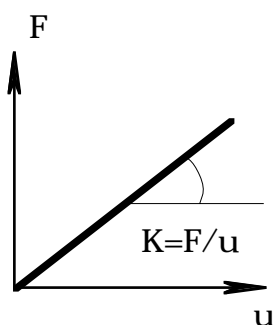
$$\Theta_B = \frac{M_B \cdot L}{8 \cdot E \cdot I} \quad \text{med} \quad M_B = -\frac{P \cdot L}{8} \quad \text{blir} \quad \Theta_B = \frac{-P \cdot L^2}{64 \cdot E \cdot I}$$

Vid beräkning av snittmomenten i de enskilda balkelementen måste inflyandet från det lokala fallet och systemfallet ovan superponeras:



## Systematiserad förskjutningsmetod

Förskjutningsmetoden bygger på att man bestämmer styvheten (förhållandet mellan krafter och deformationer) i en struktur. I det enklaste fallet kan man illustrera detta med en fjäder:



För en mera komplicerad struktur beskrivs styvheten som förhållandet mellan krafter och förskjutningar i noder (knutpunkter) sammanbundna med element för vilka spänningstillståndet antas vara entydigt bestämt av förskjutningarna i noderna. I matrisform kan man på motsvarande sätt som för fjädern skriva:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{U}$$

där

$\mathbf{F}$  = lastvektor

$\mathbf{K}$  = styvhetsmatris

$\mathbf{U}$  = förskjutningsvektor

när styvhetsmatrisen är känd kan förskjutningarna bestämmas för godtyckliga nodlaster genom lösning av det linjära ekvationssystemet.

$$\mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{U}$$

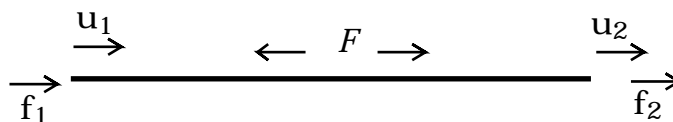
Styvhetsmatrisen (och dess invers) är således enbart beroende av strukturens geometri och mekaniska egenskaper och inte av de yttre laster som verkar på den (så länge dessa laster inte är så stora att de förändrar egenskaperna!).

Styvhetsmatrisen är en symmetrisk  $n \times n$  matris där  $n$ =antalet frihetsgrader i systemet. Dvs generellt kommer krafterna i en nod att vara beroende av förskjutningarna i samtliga noder i systemet och tv, förskjutningarna i en enskild nod påverkas av de yttre krafter som verkar i vilken nod som helst i strukturen.

I den följande beskrivningen kommer vi att behandla matrismetoder för att beräkna balksystem. Detta är dock ingen begränsning av metoden. I en mera allmän formulering -  finita element metoden, FEM - kan den användas för godtyckliga strukturer.

## Elementstyvhetsmatris Exempel: Stång

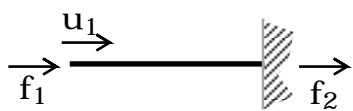
Stången representeras av ett element med styvhet enbart i axiell led.



De interna (drag-)krafterna kan vi skriva  
där  $s$  = styvhet och  $d$  = förlängning.

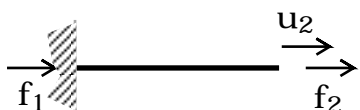
$$F = s \cdot d$$

$$F = f_2 = -f_1$$



Sätt  $u_2 = 0$       $d = u_2 - u_1 = -u_1$

ger:  $f_1 = s \cdot u_1$       $f_2 = -s \cdot u_1$



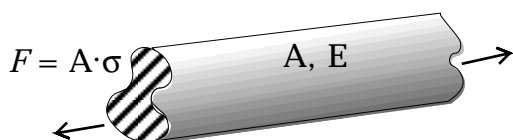
Sätt  $u_1 = 0$       $d = u_2 - u_1 = u_2$

ger:  $f_1 = -s \cdot u_2$       $f_2 = s \cdot u_2$

eller på matrisform:

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & -s \\ -s & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

För de interna krafterna gäller följande  
jämviktsekvation och konstitutiva samband:



$$s \cdot d = A \cdot \sigma = A \cdot E \cdot \varepsilon = A \cdot E \cdot \frac{d}{L}$$

vilket ger:  $s = \frac{A \cdot E}{L}$

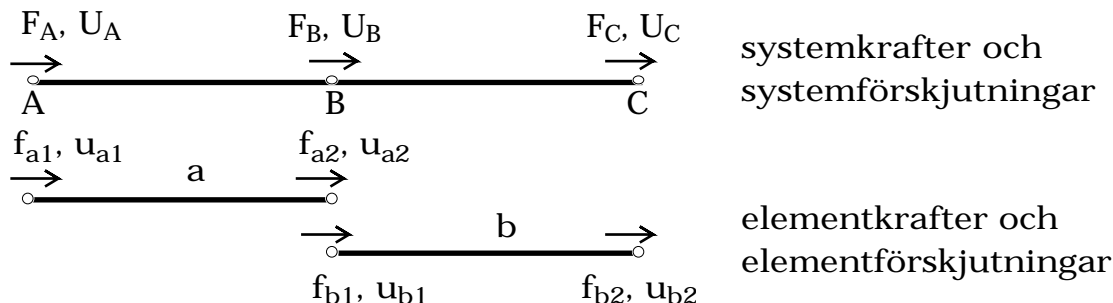
$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \frac{A \cdot E}{L} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}$$

## Assemblering av elementstyheter till systemstyhetsmatris

### Exempel: Två stänger

För sammansatta strukturer skiljer vi på:



Elementstyheterna kan i samlad (men okopplad) form skrivas

$$\begin{bmatrix} f_{a1} \\ f_{a2} \\ f_{b1} \\ f_{b2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_a & -s_a & 0 & 0 \\ -s_a & s_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_b & -s_b \\ 0 & 0 & -s_b & s_b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{a1} \\ u_{a2} \\ u_{b1} \\ u_{b2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{k}^e \cdot \mathbf{u}^e$$

Jämvikt ger:

$$\begin{matrix} F_A = f_{a1} \\ F_B = f_{a2} + f_{b1} \\ F_C = f_{b2} \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} F_A \\ F_B \\ F_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_{a1} \\ f_{a2} \\ f_{b1} \\ f_{b2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{f}^e$$

Kompatibilitet ger:

$$\begin{matrix} u_{a1} = U_A \\ u_{a2} = U_B \\ u_{b1} = U_B \\ u_{b2} = U_C \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} u_{a1} \\ u_{a2} \\ u_{b1} \\ u_{b2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{U}$$

Totala systemstyhetsrelationen kan skrivas:

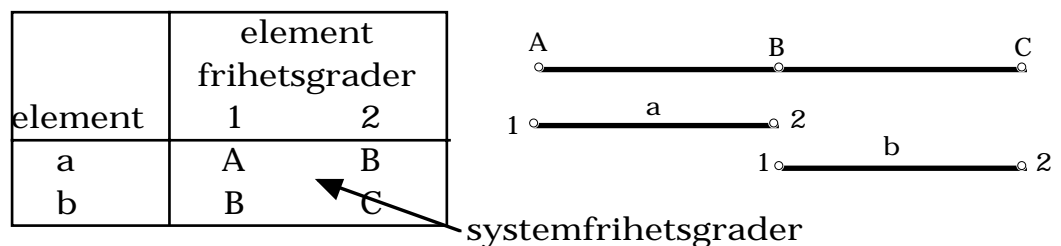
$$\mathbf{F} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{f}^e = \mathbf{A} \cdot \mathbf{k}^e \cdot \mathbf{u}^e = \mathbf{A} \cdot \mathbf{k}^e \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{U} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{U}$$

## Assemblering med hjälp av "topologimatrix" (kopplingsmatrix)

I praktiken finns det för stora system betydligt enklare sätt att assemblera systemstyvhetsmatrisen än det principiella som användes för stängerna på föregående sida.

Med fördel kan man använda en sk topologimatrix för att beskriva sambandet mellan elementernas lokala frihetsgrader/styvhetskomponenter och systemets.

I föregående exempel har vi:



Om elementstyvheten skrivs på allmän form

$$\mathbf{k}^e = \begin{pmatrix} k_{11}^e & k_{12}^e \\ k_{21}^e & k_{22}^e \end{pmatrix} \text{ för båda elementen}$$

kan vi addera styvhetskomponenterna  $k_{ij}^e$  i systemstyvhetsmatrisen genom att identifiera index ur topologimatrixen

$k_{11}^a$  adderas till  $K_{AA}$  ,  $k_{12}^a$  adderas till  $K_{AB}$

$k_{21}^a$  adderas till  $K_{BA}$  ,  $k_{22}^a$  adderas till  $K_{BB}$

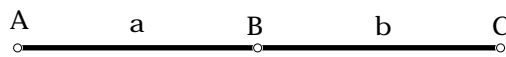
och motsvarande för elementet b.

Systemstyvhetsmatrisen blir då:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} K_{AA} & K_{AB} & K_{AC} \\ K_{BA} & K_{BB} & K_{BC} \\ K_{CA} & K_{CB} & K_{CC} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^a & k_{12}^a & 0 \\ k_{21}^a & k_{22}^a + k_{11}^b & k_{12}^b \\ 0 & k_{21}^b & k_{22}^b \end{bmatrix}$$

## Randvillkor

Införs styvheterna för stängerna a och b i exemplet blir systemets styvhetsrelation:

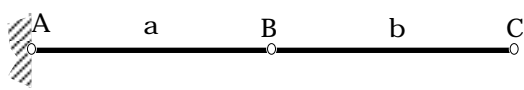


$$\begin{pmatrix} F_A \\ F_B \\ F_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_a & -s_a & 0 \\ -s_a & s_a + s_b & -s_b \\ 0 & -s_b & s_b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{K}) = s_a \cdot (s_a + s_b) \cdot s_b - s_a \cdot s_b^2 - s_b \cdot s_a^2 - 0 = 0$$

Ekvationssystemet ur vilket vi vill lösa förskjutningarna är alltså ej entydigt lösbart (oändligt antal lösningar pga stelkroppsförskjutning).

Om vi låser strukturen i en punkt t ex  $U_A=0$  reduceras ekvationssystemet och blir lösbart:



$$\begin{pmatrix} F_A \\ F_B \\ F_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_a \\ -s_a \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -s_a & 0 \\ s_a + s_b & -s_b \\ -s_b & s_b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_A=0 \\ U_B \\ U_C \end{pmatrix}$$

$F_A = -s_a \cdot U_B$  är nu en reaktionskraft som ej påverkar förskjutningen av systemet.

Förskjutningarna  $U_B$  och  $U_C$  blir

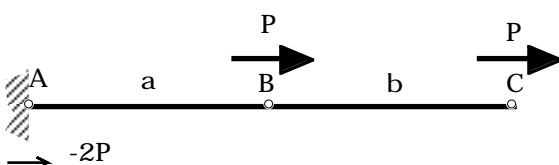
$$\begin{pmatrix} U_B \\ U_C \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s_a} & \frac{1}{s_a} \\ \frac{1}{s_a} & \frac{1}{s_a} + \frac{1}{s_b} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_B \\ F_C \end{pmatrix}$$

Antag att en punktkraft  $P$  angriper i vardera noden B och C då blir

$$U_B = \frac{2 \cdot P}{s_a} \quad U_C = \frac{2 \cdot P}{s_a} + \frac{P}{s_b}$$

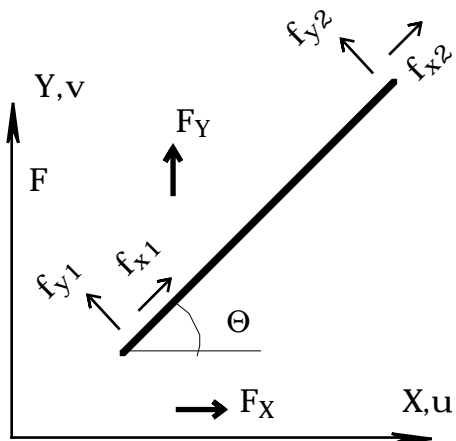
och reaktionskraften vid inspänningen blir:

$$F_A = -s_a \cdot \frac{2 \cdot P}{s_a} = -2 \cdot P$$





## Transformering mellan lokalt och globalt koordinatsystem



Betrakta en stång i XY-planet som är vriden en vinkel  $\theta$  i förhållande systemets huvudriktningar. Stången har bara styvhet i sin lokala x-riktning, men för att kunna överföra styvheten till globala koordinater inför vi även lokala frihetsgrader i y-riktningen:

Kraftjämvikt ger:

$$f_x = F_X \cdot \cos(\theta) + F_Y \cdot \sin(\theta)$$

$$f_y = -F_X \cdot \sin(\theta) + F_Y \cdot \cos(\theta)$$

$$\begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{X1} \\ F_{Y1} \\ F_{X2} \\ F_{Y2} \end{bmatrix}$$

elementorienterat  $\rightarrow$   $\mathbf{f}^e = \mathbf{T} \mathbf{F}^e$   $\leftarrow$  systemorienterat

$\downarrow$  transformationsmatris

på samma sätt:

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{T} \mathbf{U}^e$$

med

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{k}^e \cdot \mathbf{u} \quad \text{dvs} \quad \mathbf{T} \mathbf{F}^e = \mathbf{k}^e \cdot \mathbf{T} \mathbf{U}^e \quad \text{blir}$$

$$\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{T} \mathbf{F}^e = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{k}^e \cdot \mathbf{T} \mathbf{U}^e \quad \text{dvs} \quad \mathbf{F}^e = \mathbf{K}^e \cdot \mathbf{U}^e \quad \text{där}$$

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{k}^e \cdot \mathbf{T}$$

(för ortogonala transformationer gäller  $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T$ )

## Sammanfattning av systematisk lösning med matrismetod (enl SSD)

**TABLE 5.1 PRINCIPAL STEPS IN MATRIX STIFFNESS ANALYSIS**

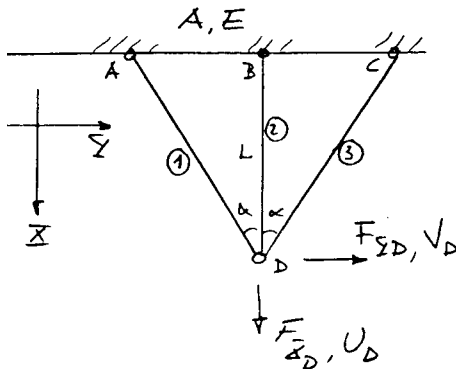
1 Define the structural model (structure coordinate system, nodes, node numbers, element types, and loads).	1: $\mathbf{f}^e = \mathbf{k}^e \boldsymbol{\delta}^e$
2 Determine each element stiffness matrix $\mathbf{k}^e$ and transform it to structure coordinates (whereupon it is denoted $\mathbf{K}^e$ ).	2: $\mathbf{K}^e = \mathbf{T}^T \mathbf{k}^e \mathbf{T}$
3 Assemble the structure stiffness matrix $\mathbf{K}$ from the individual element stiffness matrices $\mathbf{K}^e$ thus obtaining the system of equilibrium equations.	3: $\mathbf{K} = \mathbf{A} \mathbf{K}^e \mathbf{A}^T$ (el. topologimatrix) $\mathbf{F} = \mathbf{F}_n + \mathbf{T}^T \mathbf{f}^e_{eq}$
4 Apply the support conditions to the system of equations.	4: reducera $\mathbf{K}$
5 Solve for the displacements and then, if desired, the reaction forces at the supports.	5: $\Delta = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}$
6 For each element, obtain the nodal displacements and then use the internal force (or stress) matrix of that element to obtain the internal forces (or stresses).	6: $\Delta^e = \mathbf{A}^T \Delta$ $\boldsymbol{\delta}^e = \mathbf{T} \Delta^e$ $\mathbf{f}^e = \mathbf{k}^e \boldsymbol{\delta}^e$
7 If equivalent nodal loads were used to represent distributed loads, superimpose the fixed-end forces from the solution of the "internal problem."	7: $\mathbf{f}^e = \mathbf{k}^e \mathbf{T} \mathbf{A}^T \Delta$ $- \mathbf{f}^e_{eq}$

I beteckningarna ovan används gemena bokstäver för att representera lokala elementstorheter och versala för att beteckna systemets storheter.

$\boldsymbol{\delta}$ ,  $\Delta$  representerar frihetsgrader generellt (rotationer och förskjutningar) och  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{F}$  representerar krafter och moment.

$\mathbf{f}^e_{eq}$  är de ekvivalenta nodkrafter som kommer att verka på systemet pga lokala utbredda laster på ett element (dvs fastinspänningsreaktionskrafter med omvänt tecken)

## Exempel på användning av systematisk matrismetod Enkelt fackverk med två frihetsgrader

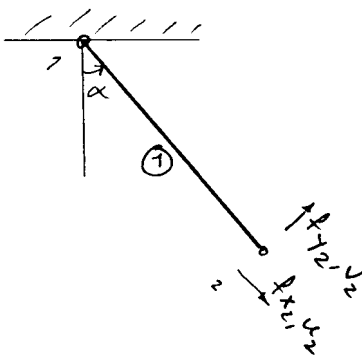


Bestäm sambandet mellan krafter och förskjutningar i punkten D

1. Definiera ett globalt koordinatsystem, numrera frihetsgrader och element

2. Bestäm de lokala elementstyvhetsmatriserna och transformera dessa till det globala koordinatsystemet

Generellt för en stång: (se SSD 5.2.2 och 5.2.3)



$$\begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \end{bmatrix} = \frac{A \cdot E}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

För stång 1 ger detta:

$$(\mathbf{f}^e = \mathbf{k}^e \delta^e) \quad \begin{pmatrix} f_{x2} \\ f_{y2} \end{pmatrix}^1 = \frac{A \cdot E}{L_1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}^1$$

Som transformeras enligt  $\mathbf{K}^e = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{k}^e \cdot \mathbf{T}$  med transformationen

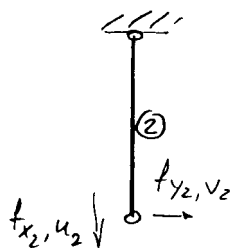
$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix} \quad (\text{se SSD 5.2.5})$$

$$\begin{pmatrix} F_{XD} \\ F_{YD} \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_D \\ V_D \end{pmatrix} \cdot \frac{A \cdot E}{L_1} \quad \text{vilket ger}$$

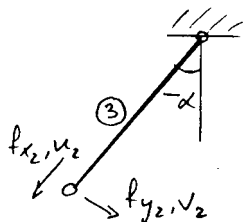
$$\begin{pmatrix} F_{XD} \\ F_{YD} \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda\mu \\ \lambda\mu & \mu^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_D \\ V_D \end{pmatrix} \cdot \frac{A \cdot E}{L_1}$$

Exempel på användning av systematisk matrismetod, forts

På samma sätt för element 2 och 3:



$$\begin{pmatrix} F_{XD} \\ F_{YD} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_D \\ V_D \end{pmatrix} \cdot \frac{A \cdot E}{L_2}$$



$$\begin{pmatrix} F_{XD} \\ F_{YD} \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & -\lambda\mu \\ -\lambda\mu & \mu^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_D \\ V_D \end{pmatrix} \cdot \frac{A \cdot E}{L_3} \quad (\lambda = \cos(\alpha), \mu = \sin(\alpha))$$

### 3. Assemblering

Vi sätter  $L_2 = L$  och därmed  $L_1 = L_3 = L/\cos(\alpha) = L/\lambda$

Systemets styvhetsrelation blir:

(termerna i ordning från element 1,2,3 etc)

$$\begin{pmatrix} F_{XD} \\ F_{YD} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^3 + 1 + \lambda^3 & \lambda^2 \cdot \mu + 0 - \lambda^2 \cdot \mu \\ \lambda^2 \cdot \mu + 0 - \lambda^2 \cdot \mu & \lambda \cdot \mu^2 + 0 + \lambda \cdot \mu^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_D \\ V_D \end{pmatrix} \cdot \frac{A \cdot E}{L}$$

$$\begin{pmatrix} F_{XD} \\ F_{YD} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \lambda^3 + 1 & 0 \\ 0 & 2 \cdot \lambda \cdot \mu^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_D \\ V_D \end{pmatrix} \cdot \frac{A \cdot E}{L}$$

4. Randvillkoren är i detta exempel redan införda på elementnivå

5. Lösningen på ekvationssystemet blir enkel:

$$\begin{pmatrix} U_D \\ V_D \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2 \cdot \lambda^3 + 1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2 \cdot \lambda \cdot \mu^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{XD} \\ F_{YD} \end{pmatrix} \cdot \frac{L}{A \cdot E}$$

I ett tidigare exempel med "kraftmetoden" hade vi  $F_{XD} = P$  vilket nu ger (och tidigare gav!) förskjutningen:

$$U_D = \frac{P \cdot L}{A \cdot E} \cdot \frac{1}{2 \cdot \lambda^3 + 1}$$

Exempel på användning av systematisk matrismetod, forts

6. För att kunna räkna ut snittstorheter i de enskilda elementen får vi återgå till lokala storheter:

$$\delta^e = \mathbf{T} \Delta^e \text{ och } \mathbf{f}^e = \mathbf{k}^e \delta^e$$

För t ex stång nr 1 får vi

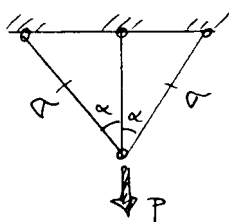
$$\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_D \\ V_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2 \cdot \lambda^3 + 1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2 \cdot \lambda \cdot \mu^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{XD} \\ F_{YD} \end{pmatrix} \cdot \frac{L}{A \cdot E}$$

$$\begin{pmatrix} f_{x2} \\ f_{y2} \end{pmatrix}^1 = \frac{A \cdot E \cdot \lambda}{L} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}^1$$

Spänningen i stängen som funktion av de lokala stångkrafterna blir:

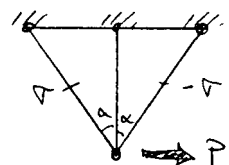
$$\sigma = \frac{f_{x2}}{A} = \frac{u_2 \cdot E \cdot \lambda}{L} = \frac{1}{A} \cdot \begin{bmatrix} \lambda^2 & 1 \\ 2 \cdot \lambda^3 + 1 & 2 \cdot \mu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{XD} \\ F_{YD} \end{bmatrix}$$

En yttre vertikal kraft  $F_{XD} = P$  ger alltså en dragspänning i stång 1 (och stång 3 pga symmetri) på



$$\sigma = \frac{P}{A} \cdot \frac{\cos(\alpha)^2}{2 \cdot \cos(\alpha)^3 + 1}$$

En horisontell kraft  $F_{YD} = P$  ger



$$\sigma = \frac{P}{A} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sin(\alpha)}$$

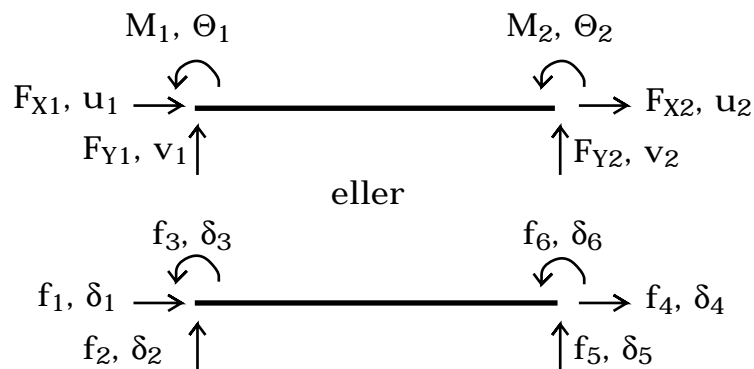
(obs dragkraft i stång 1 men tryckkraft i stång 3, ej symmetri)

För  $\alpha = 0$  är varken förskjutningar eller spänningar definierbara för yttre horisontella krafter!

## Balkar i ramverk och gallerverk

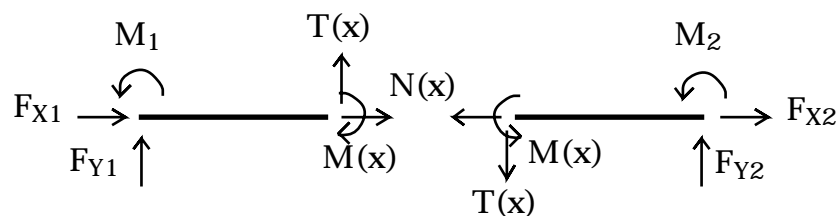
Egenskaperna hos ett balkelement som del av ett lastbärande system beskrivs av dess styvhet, dvs förhållandet mellan nodförskjutningar och nodkrafter. För att man lätt ska kunna koppla ihop balkelement arbetar man men fördel med generella riktningssdefinitioner för frihetsgrader i elementen.

I SSD används följande numreringar och riktningar för de 6 frihetsgraderna i ett ramverkselement. (Det är inte ovanligt att man i annan litteratur använder omvända riktningar på frihetsgrad 3 och 6).



Det är viktigt att ha klart för sig skillnaden mellan nodkrafter och snittkrafter. I motsats till de generella riktningar som används för nodkrafter, är snittkrafterna alltid motriktade varandra på vardera sidan om ett snitt.

Vi använder följande definitioner på snittkrafternas riktningar (i enlighet med t ex kurserna i Hållasthetslära, men i motsats till SSD!)

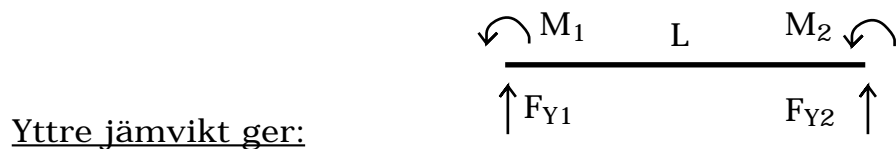


Snittkrafterna i balkelementets ändpunkter blir således

$$T(0) = -F_{Y1}, \quad M(0) = +M_1, \quad T(L) = +F_{Y2}, \quad M(L) = -M_2$$

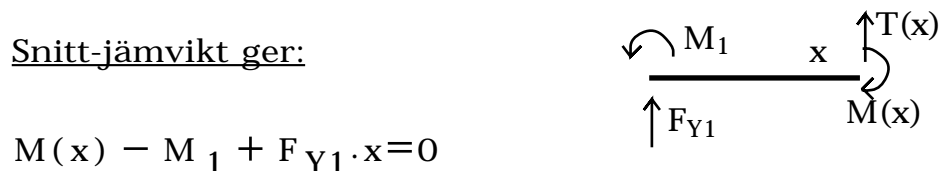
## Böjstyvhet hos ett balkelement

Sambandet mellan nodkrafter och förskjutningar kan vi direkt härleda ur jämviktsvillkor och "elastiska linjens ekvation".  
(I SSD finns en mera generell härledningsmetod som vi återkommer till i samband med FEM)



$$M_1 + F_{Y2} \cdot L + M_2 = 0$$

$$F_{Y1} + F_{Y2} = 0 \quad \text{vilket ger} \quad F_{Y1} = -F_{Y2} = \frac{M_1 + M_2}{L}$$



$$M(x) - M_1 + F_{Y1} \cdot x = 0$$

$$T(x) + F_{Y1} = 0 \quad \text{vilket ger}$$

$$M(x) = M_1 - F_{Y1} \cdot x = M_1 - (M_1 + M_2) \cdot \frac{x}{L}$$

$$T(x) = -F_{Y1} = -\frac{M_1 + M_2}{L} = \left( \frac{d}{dx} M(x) \right)$$

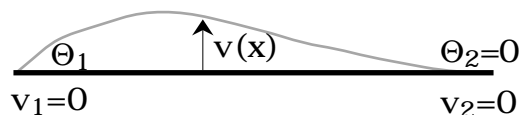
### Elastiska linjens ekvation:

$$v''(x) = \frac{-M(x)}{E \cdot I} = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left[ (M_1 + M_2) \cdot \frac{x}{L} - M_1 \right]$$

$$v'(x) = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left[ (M_1 + M_2) \cdot \frac{x^2}{2 \cdot L} - M_1 \cdot x + C_1 \right]$$

$$v(x) = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left[ (M_1 + M_2) \cdot \frac{x^3}{6 \cdot L} - M_1 \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 \cdot x + C_2 \right]$$

Vi kan nu identifiera integrationskonstanterna och därmed  $M_1$  och  $M_2$  separat för varje frihetsgrad



Ex för utböjningsvinkeln i balkelementets vänsterände  $\Theta_1$

$$v'(0) = \Theta_1 \quad v(0) = 0 \quad v'(L) = 0 \quad v(L) = 0$$

De två första randvillkoren ger:

$$C_1 = E \cdot I \cdot \Theta_1 \quad C_2 = 0$$

och de två följande:

$$v'(L) = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left[ (M_1 + M_2) \cdot \frac{L^2}{2} - M_1 \cdot L + E \cdot I \cdot \Theta_1 \right] = 0$$

$$v(L) = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left[ (M_1 + M_2) \cdot \frac{L^3}{6} - M_1 \cdot \frac{L^2}{2} + E \cdot I \cdot \Theta_1 \cdot L + 0 \right] = 0$$

$$M_1 - M_2 = \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} \cdot \Theta_1 \quad 2 \cdot M_1 - M_2 = \frac{6 \cdot E \cdot I}{L} \cdot \Theta_1$$

Ur vilket vi kan lösa:

$$M_1 = \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \cdot \Theta_1 \quad M_2 = \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} \cdot \Theta_1$$

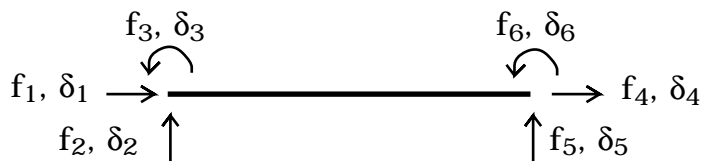
$$F_{Y1} = \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \cdot \Theta_1 \quad F_{Y2} = -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \cdot \Theta_1$$

På samma sätt kan vi identifiera de andra komponenterna som svarar mot balkens böjstyvhet.

$$\begin{bmatrix} F_{Y1} \\ M_1 \\ F_{Y2} \\ M_2 \end{bmatrix} = \frac{E \cdot I}{L} \cdot \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 4 & -\frac{6}{L} & 2 \\ -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 2 & -\frac{6}{L} & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \Theta_1 \\ v_2 \\ \Theta_2 \end{bmatrix}$$



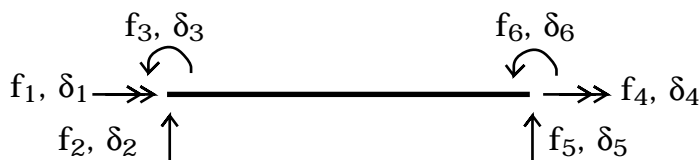
## Styvhetsmatrisen för ett (slankt) ramverkselement



Böjstyvheten tillsammans med den axiella styvheten (se stängelementet tidigare) ger styvhetsrelationen: (SSD 5.3.15)

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 & -\frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & 0 & -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} & 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} \\ -\frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 & \frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} & 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{bmatrix}$$

## Styvhetsmatrisen för ett (slankt) gallerverkselement



Om vi ersätter den axiella styvheten med vridstyvheten får vi motsvarande för ett gallerverkselement (där böjstyvheten verkar ur systemets plan)

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{G \cdot K}{L} & 0 & 0 & -\frac{G \cdot K}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & 0 & -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} & 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} \\ -\frac{G \cdot K}{L} & 0 & 0 & \frac{G \cdot K}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} & 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{bmatrix}$$

## Exempel på användning av styvhetsmatrisen för ett ramverkselement

Beräkna nedböjning och inspänningskrafter för en konsolbalk:



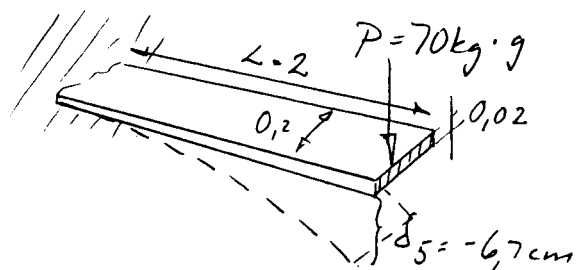
Balken har 2 frihetsgrader,  $\delta_5$  och  $\delta_6$  enligt tidigare def. ( $\delta_4$  bortser vi från eftersom vi inte har några axiella krafter i problemet.) Ur den generella styvhetsmatrisen erhåller vi:

$$\begin{pmatrix} f_5 = -P \\ f_6 = 0 \end{pmatrix} = \frac{E \cdot I}{L} \cdot \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ -\frac{6}{L} & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_5 \\ \delta_6 \end{pmatrix}$$

invertering av matrisen ger:

$$\begin{pmatrix} \delta_5 \\ \delta_6 \end{pmatrix} = \frac{L}{E \cdot I} \cdot \begin{bmatrix} \frac{L^2}{3} & \frac{L}{2} \\ \frac{L}{2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -P \\ 0 \end{pmatrix}$$

Antag att konsolbalken består av en strimla fartygsplåt, 2 m lång, 0,2 m bred och 20 mm tjock, och att det är du som står i längst ut på den fria änden ( $P=700 \text{ N}$ ):



$$L := 2 \quad P := 700 \quad E := 2.1 \cdot 10^{11}$$

$$I := 1.33 \cdot 10^{-7} \quad A := 0.004$$

ger

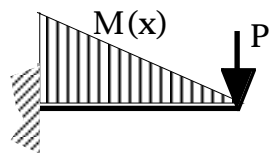
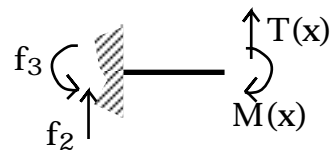
$$\begin{pmatrix} \delta_5 \\ \delta_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-P \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I} = -0.067 \\ \frac{-P \cdot L^2}{2 \cdot E \cdot I} = -0.05 \end{bmatrix}$$

Reaktionskrafterna får vi om vi går tillbaka till den generella styvhetsmatrisen med de nu kända förskjutningarna samt randvillkoren  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4 = 0$ :

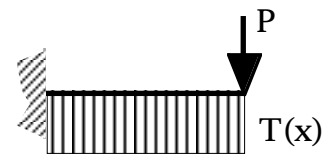
Exempel på användning av styvhetsmatrisen forts.

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 & -\frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & 0 & -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} & 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} \\ -\frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 & \frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} & 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_1 = 0 \\ \delta_2 = 0 \\ \delta_3 = 0 \\ \delta_4 = 0 \\ \delta_5 = \frac{-P \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I} \\ \delta_6 = \frac{-P \cdot L^2}{2 \cdot E \cdot I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ P \\ P \cdot L \\ 0 \\ -P \\ 0 \end{bmatrix}$$

Snittkrafterna blir



$$M(x) = f_3 - f_2 \cdot x = P \cdot (L - x)$$

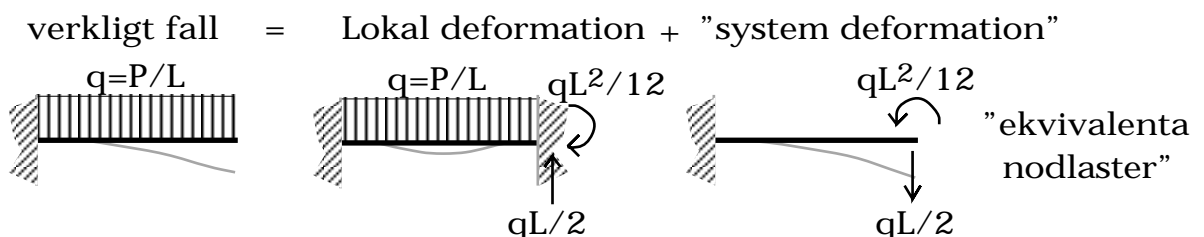


$$T(x) = -f_2 = -P$$

och maximal böjspänning:

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{I} \cdot \frac{h}{2} = \underline{106 \text{ MPa}} \quad (\text{vilket är ca } 1/3 \text{ av sträckgränsen})$$

Om lasten istället hade varit utbredd längs balken, hade man fått dela in problemet i ett lokalt deformationstillstånd och ett nodlasttillstånd, varav det första löses med elementarfall och det senare med matrismetod enligt ovan.



## Randvillkor: Fasta inspänningar

reducerar antalet frihetsgrader och därmed storleken på förskjutningsvektorn. I exemplet med konsolbalken, utgjorde randvillkoren  $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$ . I den generella elementstyhetsrelationen innebär detta att kolumnerna 1-3 kommer att multipliceras med 0 dvs blir överflödiga och kan strykas. Reaktionskrafterna  $f_1, f_2, f_3$  kan beräknas för godtyckliga förskjutningar  $\delta_4, \delta_5, \delta_6$  medan det omvända inte gäller, ev yttre krafter i inspänningen kan naturligtvis inte påverka balkens förskjutningar. För att kunna lösa ekvationssystemet stryks därför även raderna 1-3, varvid styvhetsmatrisen blir inverterbar och förskjutningarna kan lösas ut som funktion av de yttre krafterna.


(I exemplet togs inte heller den axiella frihetsgraden  $\delta_4$  med. Detta var inte något egentligt randvillkor utan en begränsning motiverad av att inga axiella krafter fanns med i problemet, och frihetsgraden inte var kopplad till någon annan)

## Föreskrivna förskjutningar

är också att betrakta som fasta inspänningar och leder till att antalet frihetsgrader reduceras.

Låt oss t ex ange en förutbestämd vinkel  $\Delta_6$ .

Böjstyhetsrelationen blir:



$$\begin{bmatrix} f_2 \\ f_3 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix} = \frac{E \cdot I}{L} \cdot \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 4 & -\frac{6}{L} & 2 \\ -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 2 & -\frac{6}{L} & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_5 \\ \delta_6 = \Delta_6 \end{bmatrix}$$

Varje kraftkomponent kommer att innehålla en term bestående av en konstant multiplicerad med  $\Delta_6$ .

Föreskrivna förskjutningar, forts.

Vi kan därför skriva om ekvationssystemet genom att flytta den konstanta termen till vänsterledet:

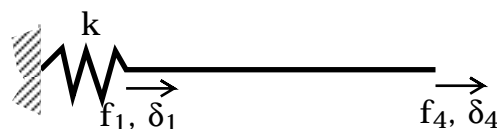
$$\begin{bmatrix} f_2 - \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \cdot \Delta_6 \\ f_3 - \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} \cdot \Delta_6 \\ f_5 + \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \cdot \Delta_6 \end{bmatrix} = \frac{E \cdot I}{L} \cdot \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} \\ \frac{6}{L} & 4 & -\frac{6}{L} \\ -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & \frac{12}{L^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_5 \end{bmatrix}$$

$f_6$  gör systemet överbestämt och är av samma skäl som tidigare borttaget ur ekvationssystemet.

## Fjädrande randvillkor

reducerar inte antalet frihetsgrader utan ger endast ett tillskott till styvheten. Fjäderkonstanten  $k_x = f_x / \delta_x$  adderas till diagonaltermen som svarar mot frihetsgrad  $x$  i styvhetsmatrisen

Exempel: Dragfjäder vid infästningen av en stång



Utan fjäder är styvhetsrelationen:

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E \cdot A}{L} & -\frac{E \cdot A}{L} \\ -\frac{E \cdot A}{L} & \frac{E \cdot A}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_4 \end{pmatrix}$$

(obs singular)

Fjädern ger ett bidrag till nodkraften  $f_1$  som är  $k \cdot \delta_1$

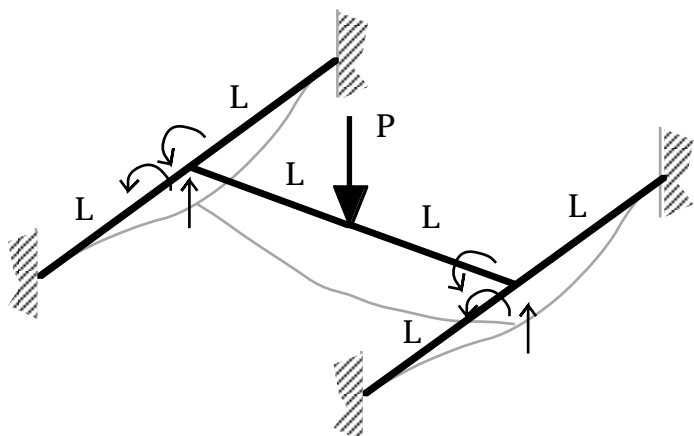
Med fjäder blir styvhetsrelationen:

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E \cdot A}{L} + k & -\frac{E \cdot A}{L} \\ -\frac{E \cdot A}{L} & \frac{E \cdot A}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_4 \end{pmatrix}$$

(singulariteten har upphört)

Fjädrande randvillkor är ofta ett effektivt sätt att representera omgivningens inflytande på en lokal struktur

## Exempel: Gallerverk

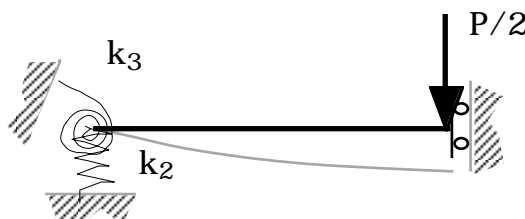
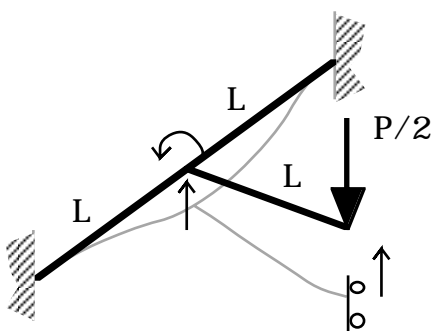


Som ett exempel på hur man kan utnyttja fjädrande randvillkor för att beskriva ett problem ska vi undersöka nedböjningen av ett enkelt gallerverk. Gallerverket har 6 frihetsgrader, 2 rotationer och vertikal förskjutning i vardera fria noden, (axiella krafter och förskjutningar tas inte med).

I stället för att bygga upp systemets styvhetsmatris från de enskilda elementens bidrag, kan vi betrakta problemet enbart utifrån den tvärgående balken, där sidobalkarnas böjstyvhets och vridstyvhets representeras av fjädrar.

Vi utnyttjar också symmetrin i de båda

huvudriktningarna. Observera att symmetrin måste gälla både struktur och last!



styvhetsrelationen för det tvärgående elementet blir:

$$\begin{pmatrix} f_2 \\ f_3 \\ f_5 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} + k_2 & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} \\ \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} + k_3 & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_5 \end{bmatrix}$$

Ur elementstyvhetsmatrisen för sidoelementen får vi

för böjstyvhetsen i sidobalkarna:

$$k_2 = 2 \cdot \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3}$$

(rotationen är förhindrad pga symmetrin)

och för vridstyvhetsen i sidobalkarna:

$$k_3 = 2 \cdot \frac{G \cdot K}{L}$$

Styvhetsrelationen blir:

$$\begin{pmatrix} f_2 \\ f_3 \\ f_5 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} + \frac{24 \cdot E \cdot I}{L^3} & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} \\ \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} + \frac{2 \cdot G \cdot K}{L} & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_5 \end{bmatrix}$$

med lösningen:

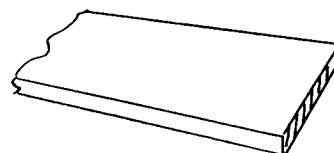
$$\begin{bmatrix} \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{24 \cdot E \cdot I} \cdot L^3 & 0 & \frac{1}{24 \cdot E \cdot I} \cdot L^3 \\ 0 & \frac{L}{E \cdot I + 2 \cdot G \cdot K} & \frac{1}{2} \cdot \frac{L^2}{E \cdot I + 2 \cdot G \cdot K} \\ \frac{1}{24 \cdot E \cdot I} \cdot L^3 & \frac{1}{2} \cdot \frac{L^2}{E \cdot I + 2 \cdot G \cdot K} & \frac{L^3}{8 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{3 \cdot E \cdot I + 2 \cdot G \cdot K}{E \cdot I + 2 \cdot G \cdot K} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_2 \\ f_3 \\ f_5 \end{pmatrix}$$

Om vi tar samma tvärsnitt och längd på balkarna som i det tidigare exemplet med konsolbalken (plåtstrimlan):

$$L := 2 \quad P := 700 \quad E := 2.1 \cdot 10^{11} \quad G := 0.8 \cdot 10^{11}$$

$$I := 1.33 \cdot 10^{-7} \quad A := 0.004$$

$$K := 0.94 \cdot 0.2 \cdot 0.02^3 \cdot \frac{1}{3}$$



får vi förskjutningsvektorn:

$$\begin{bmatrix} \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_5 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -0.004 \\ -0.007 \\ -0.019 \end{pmatrix}$$

Om vi försummar vridstyvheten i sidobalkarna blir istället:  
(jämför resultatet med konsolbalken tidigare)

$$\begin{bmatrix} \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_5 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -0.004 \\ -0.025 \\ -0.038 \end{pmatrix}$$

Eller om vi antar helt vridstyva sidobalkar:

$$\begin{bmatrix} \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_5 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -0.004 \\ 0 \\ -0.013 \end{pmatrix}$$

## Skjuvdeformationens betydelse, Icke-slanka balkar

PS  
ofta anges  
skjuveffektiv area  
 $A_s$  som  $T/\tau_{\max}$  dvs  
för en rektangulär  
sektion:  $0,67 A$ .  
Detta ger dock en  
överskattning av  
deformationen  $\delta_s$ .  
I realiteten är för  
en hög och smal  
rektangulär balk:  
 $A_s$  i storleksordn.  
 $0,85A - 0,95A$   
beroende på  
randvillkoren vid  
balkändarna och på  
förhållandet  $h/L$ .  
DS

Förutom böjdeformationerna, deformeras även en belastad balk i skjuvning. För "slanka balkar" antas att böjstyvheten är så mycket lägre än skjuvstyvheten att all deformation kan anses häröra från böjning. När vi idealiserar primära styrkeförband i fartyg som t ex vägare, bottenstockar med balkmetoder kan dock skjuvningen ha relativt stor betydelse, och för t ex skott är den helt dominerande!

Följande exempel illustrerar förhållandet mellan böj- och skjuvdeformationer för en balk belastad med en punktlast.

Vi jämför två olika tvärsnitt och tre inspänningsfall:

Rektangulär sektion:

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad \frac{I}{A_s} = 0.1 \cdot h^2$$

$$A_s = \frac{5}{6} \cdot b \cdot h$$

I-balk:

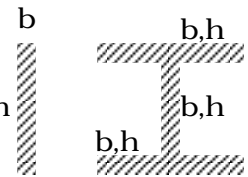
$$I = \frac{b \cdot h^3}{12} + 2 \cdot b \cdot h \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{7 \cdot b \cdot h^3}{12} \quad \frac{I}{A_s} = 0.7 \cdot h^2$$

$$A_s = b \cdot h$$

Skjuvdeformationer allmänt:

$$\gamma_{zx} = \frac{T(x)}{A_s \cdot G} \quad \delta_s = \int_0^x \gamma dx$$

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$$



Fall 1: Fast-Fri (Konsolbalk)



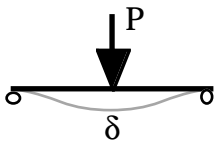
$$\delta_s = \frac{P \cdot L}{A_s \cdot G}$$

$$\frac{\delta_s}{\delta_b} = 6 \cdot (1 + \nu) \cdot \frac{I}{A_s \cdot L^2}$$

$$(0.78, 5.5) \cdot \frac{h^2}{L^2}$$

$$\delta_b = \frac{P \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I}$$

Fall 2: Fritt upplagd



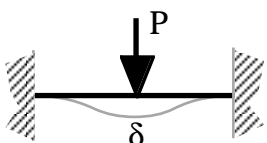
$$\delta_s = \frac{P \cdot L}{4 \cdot A_s \cdot G}$$

$$\frac{\delta_s}{\delta_b} = 24 \cdot (1 + \nu) \cdot \frac{I}{A_s \cdot L^2}$$

$$(3.1, 21.8) \cdot \frac{h^2}{L^2}$$

$$\delta_b = \frac{P \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I}$$

Fall 3: Fast inspänd



$$\delta_s = \frac{P \cdot L}{4 \cdot A_s \cdot G}$$

$$\frac{\delta_s}{\delta_b} = 96 \cdot (1 + \nu) \cdot \frac{I}{A_s \cdot L^2}$$

$$(12.5, 87.4) \cdot \frac{h^2}{L^2}$$

$$\delta_b = \frac{P \cdot L^3}{192 \cdot E \cdot I}$$

För t ex en 2 m hög bottenvägare som bär tryck i ett 15 m långt lastrum, blir skjuvdeformationen  $\cong$  böjdeformationen!



## Inflytande av skjuvning på styvhetsrelationen för en balk

Skjuvdeformationen ger ett tillskott till utböjningens derivata

$$v'_s(x) = \frac{T(x)}{G \cdot A_s} = -\frac{F_{Y1}}{G \cdot A_s}$$

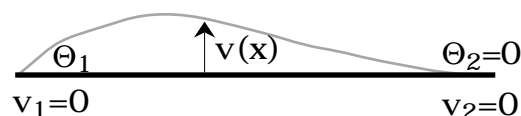
Elastiska linjens ekvation blir med skjuvning:

$$v''(x) = \frac{-M(x)}{E \cdot I} = \frac{1}{E \cdot I} \cdot (F_{Y1} \cdot x - M_1) \quad \begin{array}{l} \text{(utböjningsvinkeln} \\ \text{påverkas ej av} \\ \text{skjuvdeformationer)} \end{array}$$

$$v'(x) = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left( F_{Y1} \cdot \frac{x^2}{2} - M_1 \cdot x + C_1 \right) - \frac{F_{Y1}}{G \cdot A_s}$$

$$v(x) = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left( F_{Y1} \cdot \frac{x^3}{6} - M_1 \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 \cdot x \right) - \frac{F_{Y1}}{G \cdot A_s} \cdot x + C_2$$

På samma sätt som tidigare kan vi identifiera styvhetskomponenterna genom att turvis sätta en frihetsgrad skild från noll. T ex sätter vi utböjningsvinkeln i vänstra änden till  $\Theta_1$ , och övriga frihetsgrader lästa.



$$v(0) = 0 \quad v'(0) = \Theta_1 - \frac{F_{Y1}}{G \cdot A_s} \quad v(L) = 0 \quad v'(L) = -\frac{F_{Y1}}{G \cdot A_s}$$

$$v(0) = 0 \quad v'(0) = \Theta_1 - \frac{F_{Y1}}{G \cdot A_s} \quad v(L) = 0 \quad v'(L) = -\frac{F_{Y1}}{G \cdot A_s}$$

De båda första randvillkoren ger:

$$C_1 = E \cdot I \cdot \Theta_1 \quad C_2 = 0$$

De båda följande ger (med viss möda):

$$\boxed{\frac{M_1}{\Theta_1} = \frac{E \cdot I}{L} \cdot \frac{4 + \Phi}{1 + \Phi}}$$

$$\boxed{\frac{F_{Y1}}{\Theta_1} = \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \cdot \frac{1}{1 + \Phi}}$$

med

$$\boxed{\Phi = \frac{12 \cdot E \cdot I}{G \cdot A_s \cdot L^2}}$$

och jämviktsvillkor ger de övriga styvhetskomponenterna:

$$\boxed{\frac{M_2}{\Theta_1} = \frac{E \cdot I}{L} \cdot \frac{2 - \Phi}{1 + \Phi}}$$

$$\boxed{\frac{F_{Y2}}{\Theta_1} = -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \cdot \frac{1}{1 + \Phi}}$$

Den fullständiga elementsyvhetsmatrisen för en 3-dim balk med 12 frihetsgrader och hänsyn till skjuvdeformationer ges i SSD på sid 217 (5.5.16).

## Idealisering och modellering av fartygsstrukturer med balkmetoder

Balkmetodernas största förtjänst är att de gör det möjligt att utvärdera lastupptagningen i strukturer i gripbara storheter som böjmoment och tvärkrafter.

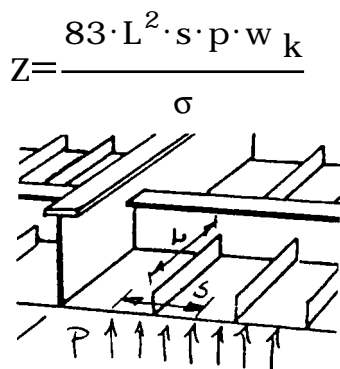
Ur dessa kan sedan "nominella spänningar" beräknas och jämföras med de kriterier som formuleras av klassreglerna eller på annat sätt.

Självklart är modelleringen av ett fartygs skrov som ett system av balkar en grov idealisering av verkligheten.

Spänningstillståndet i en punkt i skrovet kommer att vara påverkat av "nominella spänningar" kombinerat med inflytande från den lokala geometrin och belastningen. Det är därför inte tillräckligt att förlita sig på att strukturen håller om de nominella spänningsnivåerna är acceptabla, men det är nödvändigt att kontrollera dem.

### Enkla elementarfall för balkböjning

I klassreglerna (i exemplen används DnV) formuleras krav på böjmotstånd i primära och sekundära styrkeförband utifrån vanlig enkel balkböjning. För förstävningar av lateralt belastade plåtfält krävs generellt enligt reglerna:



$$Z = \frac{83 \cdot L^2 \cdot s \cdot p \cdot w_k}{\sigma}$$

där

Z = böjmotståndet (cm<sup>3</sup>)

L = förstävningens längd mellan inspänningar (m)

s = avstånd mellan förstävningar (m)

p = design tryck (kPa), verkande på panelen vid förstävningen

w<sub>k</sub> = korrosions påslagsfaktor (-)

σ = tillåten maximal spänningsnivå (MPa)

Uttrycket är lätt att härleda till ett vanligt balkböjningsfall:

$$Z = \frac{M_{\max}}{\sigma} = \frac{q \cdot L^2}{12 \cdot \sigma} = \frac{1000 \cdot L^2 \cdot s \cdot p}{12 \cdot \sigma} \quad \text{där konstanten 1000 härör från (den idiotiska!) enhetsblandningen.}$$

På samma sätt ser man för primära styrkeförband, som bär ensamma utan att ingå i ett system sk "*simple girders*":

$$Z = \frac{1000 \cdot L^2 \cdot b \cdot p \cdot w_k}{m \cdot \sigma}$$

där

b = lastbärande bredd (m)

m = "momentfaktor" bestämd av balkens inspänning.

Varianter på dessa uttryck förekommer också, men alla grundas på enkla balkböjningsfall

## Mera komplicerade system av bärande balkar

går inte att lösa lika enkelt med hjälp av elementarfall, och det går därför inte heller att skapa enkla dimensioneringsformler för dem.

### D 300 Complex girder systems.

301 In addition to fulfilling the general local requirements given in 100, the main scantlings of girders being parts of a complex system may have to be based on a direct stress analysis as outlined in Sec.13.

För att kontrollera styrkan i balksystem krävs direkta beräkningar där hänsyn tas till systemets samlade lastupptagning och styvhet.

Sådana beräkningar görs rutinmässigt med ramverks/gallerverks program eller generella FEM-program. I vissa fall kan man också förenkla problemen tillräckligt för att göra överslagsberäkningar för hand eller i mycket begränsade datormodeller.

Vissa typer av idealiseringar tvingas man alltid göra när man använder balkmetoder, oberoende av modellernas storlek:

- \* Uppskattning av balkarnas styvhet dvs effektiv fläns om flänsen är en bred plåt, effektiv skjувarea om det finns hål i livplåten etc.
- \* Uppskattning av balkarnas inspänningsförhållanden, dvs randvillkor (inflytandet från omgivningen), brickhörn etc.
- \* Lastens fördelning i balksystemet. De yttre lasterna verkar normalt på plåtfält som sedan bärs upp av balkar. Det är inte alltid trivialt hur lastfördelningen ska modelleras

Dessa idealiseringar innebär att man inte helt kan återge det verkliga beteendet. Genom erfarenhet kan man dock minimera idealiseringsfelen.

Man måste också ha klart för sig att det normalt finns en betydligt större osäkerhet i hur väl design-lastfallet återger verkligheten än i modelleringen av strukturen. Överslagsberäkningar av hållfastheten kan därför i många fall vara tillräckliga.

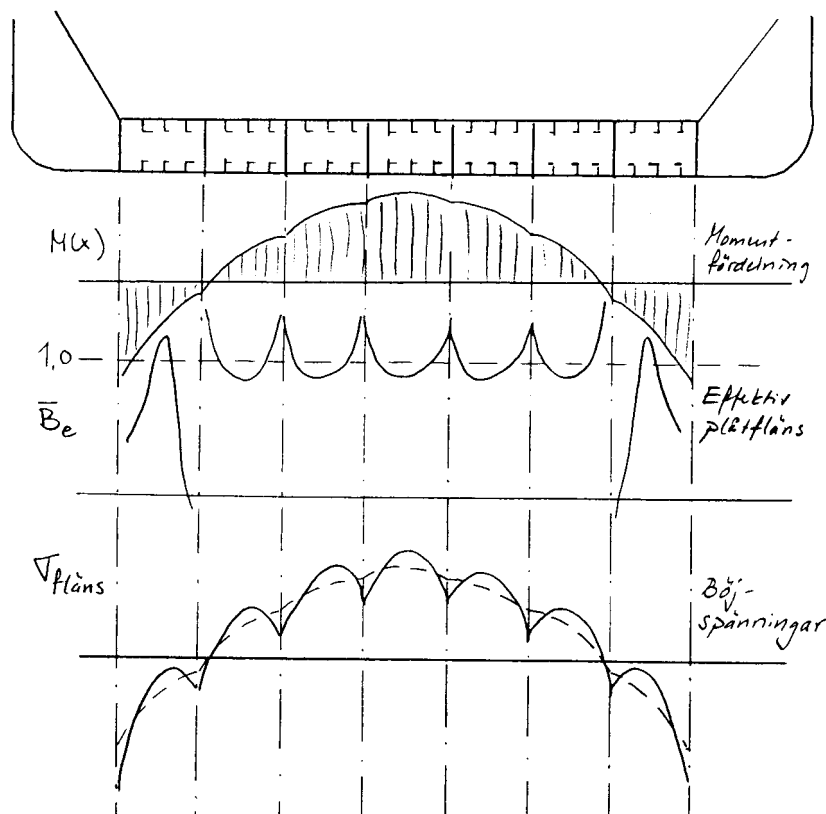
## Effektiv fläns i balkmodeller

Vi har tidigare diskuterat begreppet effektiv fläns och härlett uttryck för idealiserade randvillkor och standardfall. I de flesta fall är de låga effektiviteterna en mycket lokal företeelse i anslutning till en infästning eller punktlast. I sådana områden är det vanligt att balkarna är förstärkta genom brickor e d. Ett representativt värde för balkens styvhet kan normalt erhållas om man för beräkning av sektionströghetsmomentet  $I$ , använder den effektivitet som flänsarna har genomsnittligt i det område med längsta avståndet mellan momentnollpunkter.

För förstyvningar får (enl DnV) flänsen normalt räknas 100% effektiv vid beräkning av  $Z$  och  $I$ .

För kontroll av nominella böjspänningar i komplicerade balksystem måste man däremot vid en noggrann analys ta hänsyn till den lokala effektiviteten i flänsen vid beräkning av böjmotståndet!

Nedan visas ett principiellt exempel på hur flänsspänningarna i bottenstocken på en dubbelbottenkonstruktion kan variera på grund av varierande effektiv fläns. Belastningsfallet består av dels utbredd last (från longitudinalerna) och dels punktkrafter från bottenvägarna. Figuren baseras på beräkningar med den tidigare beskrivna "summationsmetoden".



## Effektiv skjuvarea i balkmodeller

För beräkning av balkarnas skjuvstyvhet används en s k effektiv skjuvarea  $A_s$  som för I-balkar med breda flänsar kan sättas till livplåtsarean  $A_w$ , och för balkar med rektangulär tvärsnitt eller smala flänsar minst  $0,85 A_w$ . Dessa värden gäller under förutsättning att livplåtarna är hela.

## Effektiv skjuvarea för livplåtar med hål

Om livplåten har hål som ligger glest och som är måttliga i förhållande till livplåtshöjden (<20%) påverkas knappast skjuvstyvheten i balken som helhet. Däremot måste man kontrollera att nominella skjuvspänningarna lokalt inte blir för höga pga den reducerade tvärsnittsarean. Se utdraget ur DnV - 93 här nedan:

### C 500 Effective web of girders.

**501** The web area of a girder is to be taken in accordance with particulars as given below. Structural modelling in connection with direct stress analysis is to be based on the same particulars when applicable.

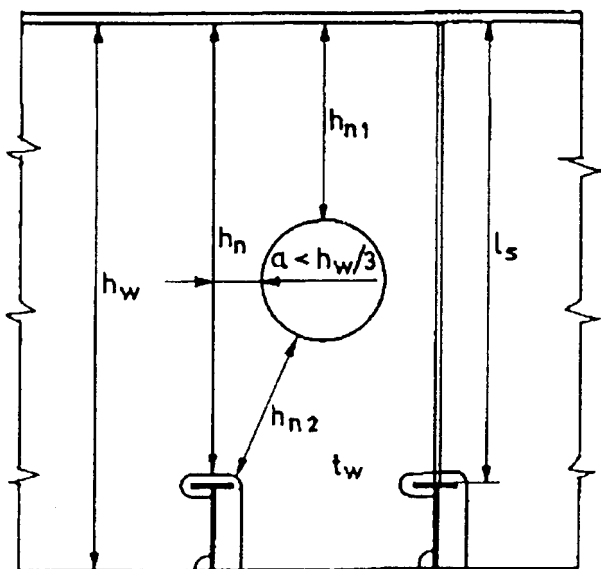
**502** Holes in girders will generally be accepted provided the shear stress level is acceptable and the buckling strength is sufficient. Holes are to be kept well clear of end of brackets and locations where shear stresses are high. For buckling control, see Sec.14 B300.

**503** For ordinary girder cross-sections the effective web area is to be taken as:

$$A_w = 0,01 h_n t_w \quad (\text{cm}^2)$$

$h_n$  = net girder height in mm after deduction of cutouts in the cross-section considered.  
=  $h_{n1} + h_{n2}$ .

If an opening is located at a distance less than  $h_w/3$  from the cross-section considered,  $h_n$  is to be taken as the smaller of the net height and the net distance through the opening. See Fig.12.



(Runt hålen uppstår det lokala spänningskoncentrationer. För ett litet hål i en stor plåt blir teoretiskt förhållandet mellan maximal kantspänning runt hålet och nominell skjuvspänning lika med 4! Om den nominella skjuvspänningen (reducerad mht hålet) blir för stor (säg >60MPa) måste hålet förstärkas med kantförstyvningar.)

För skjuvplåtar där hål och urtag utgör en betydande del av hela plåtarean (t ex skvalpskott) sjunker däremot den effektiva skjuvstyvheten drastiskt.

Ett approximativt samband som beskriver betydelsen av stora urtag i plåtfält har formulerats som  $A_{eff} = A/(1+25r^2)$  där  $r$  anger förhållandet mellan urtagens yta och hela plåtfältets yta. Naturligtvis blir effektiviteten beroende av var urtagen sitter och hur de har utformats.

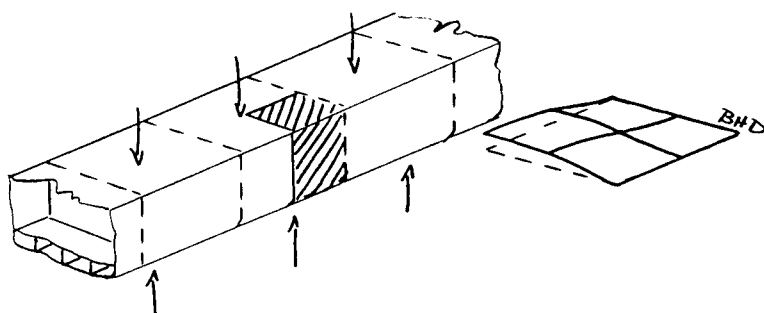
För plåtar med stor andel urtag är balkmetoder överhuvudtaget inte användbara för att analysera spänningstillståndet

## Inspänningar, Randvillkor

Så långt det är möjligt utan att man försämrar noggrannheten i analysen ska man försöka begränsa modellens storlek och antal frihetsgrader. Tidigare var detta nödvändigt för att överhuvudtaget kunna lösa problemen. Med dagens datorkapacitet är detta inget stort problem. Däremot kan man vinna en hel del tid på själva modelleringen, och framför allt tvingas man tänka igenom hur strukturen kommer att uppföra sig och var man har behov av en mera utförlig analys. Om det visar sig i en begränsad modell att resultatet är mycket känsligt för hur randvillkoren är satta, kan man senare komplettera med en större modell.

## Symmetri

Fartyg är symmetriska runt CL! Dessutom är i många fall belastningarna symmetriska både i längskeppsled och tvärskeppsled runt en lokal struktur. Självklart ska symmetrin utnyttjas så långt som möjligt för att begränsa modellen. Ett riktigt symmetrisnitt inför inget idealiseringsfel i analysen!



### Exempel:

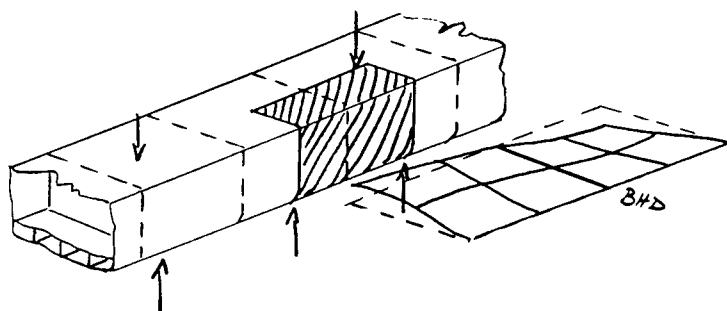
#### Bottenkonstruktion i ett fartyg vid olika lastfall:

1: Homogen last i flera lastrum i rad.

Symmetrisnitt:

- vid tvärskeppsskott
- mitt i lastrummet
- CL

1/4 lastrum modelleras

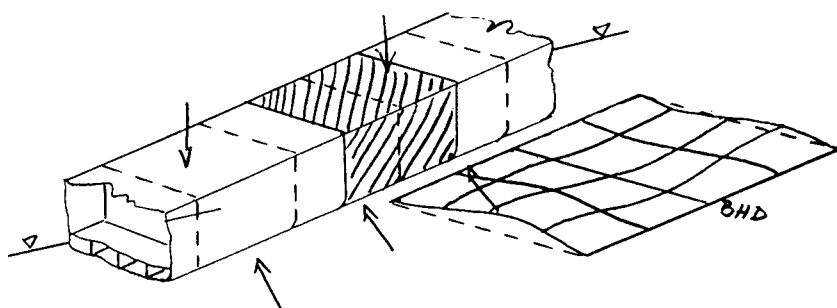


2: Olika fyllda lastrum.

Symmetrisnitt:

- CL
- (ev. mitt i vardera lastrummen)

minst 2 ggr 1/4 lastrum modelleras



3: Olika fyllda lastrum, krängt flytläge.

Symmetrisnitt:

- (ev. mitt i vardera lastrummen)

minst 2 ggr 1/2 lastrum modelleras

## Modellering av omgivningens styvhet genom randvillkor

För en begränsad modell som ingår som del i en större deformerad struktur måste omgivningens inflytande återges genom lämpliga randvillkor.

Några olika standardfall kan identifieras:

### Fasta inspänningar

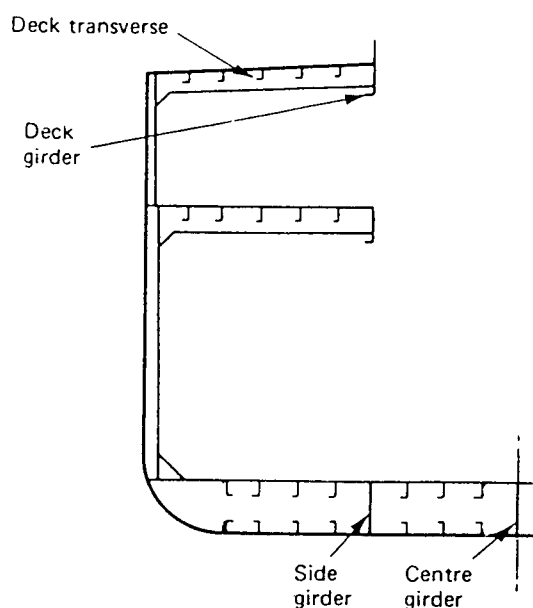
Om omgivningen kan förväntas deformeras mycket lite i förhållande till den studerade lokala strukturens deformationer, ansättes fasta inspänningar av de frihetsgrader som är berörda. (T ex för analys av de lokala böjspänningarna i en bottenlongitudinal kan long'en anses vara fast inspänd i de mycket styvare bottenstockarna.)

### Föreskrivna förskjutningar

Om omgivningens deformationer är betydande och påtvingas den studerade lokala strukturen oberoende av de lokala belastningarna och deformationerna, ansättes föreskrivna förskjutningar som randvillkor.

### Fjädrande inspänningar

Om omgivningens deformationer är betydande och delvis beroende av de lokala belastningarna och deformationerna, ansättes fjädrande randvillkor. (Eller utökas modellens utsträckning.)

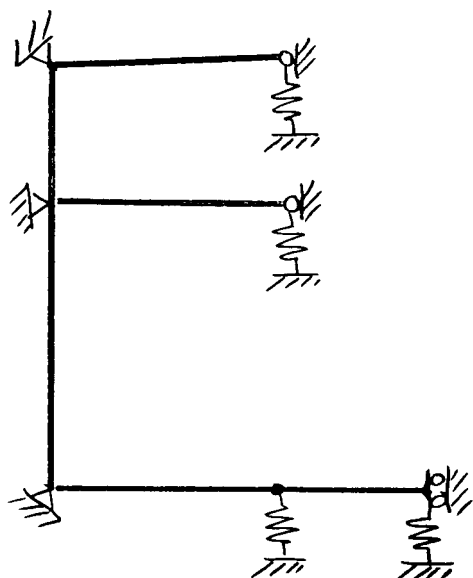
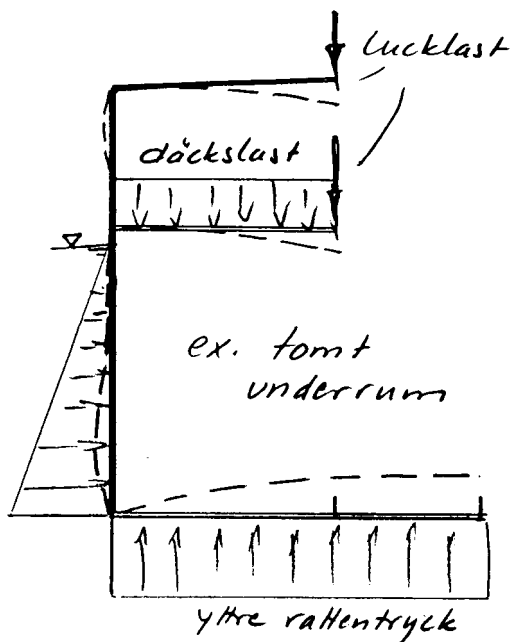


### Exempel på modellering med randvillkor:

En tvärskeppsgående vebbram i ett torrlastfartyg

Beroende på vad man vill kontrollera med analysen kan man göra modellen olika stor och noggrann. I det här exemplet ska vi se vilka randvillkor som krävs för att kunna begränsa studien till ett plant ramverk ur vilket vi bör kunna lösa ut tvärkrafter och böjmoment i vebbramens ingående element.

### Exempel på modellering med randvillkor: vebbram forts



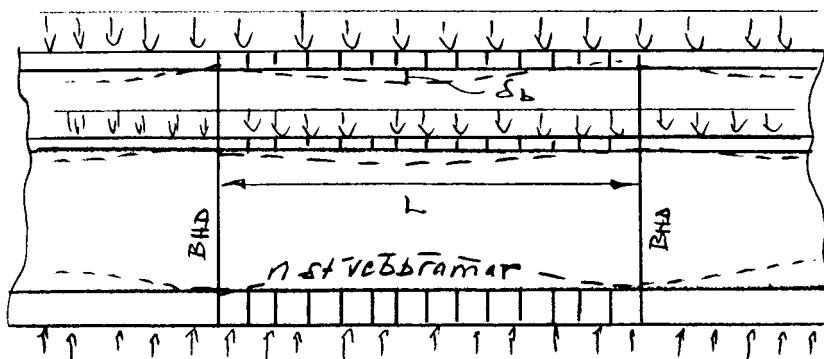
- i) Vi börjar med att skissa utböjningen av vebbramen under yttre belastning. Detta hjälper oss att få en uppfattning om vilka randvillkor som krävs. Obs att såväl förskjutningar som rotationer ska vara desamma för alla element som ansluter i en knutpunkt.
- ii) Vi utnyttjar symmetrin i CL. Denna ger rotationsinspänning av bottenstocken
- iii) Vi försummar alla axiella töjningar. De frihetsgrader som är kopplade enbart till axiell töjning elimineras med fasta randvillkor
- iv) Den vertikala utböjningen av hela sidobordläggningen i längskeppsled, och av sidodäcken i horisontell led mellan tvärskeppskotten, är obetydliga jämfört med de lokala deformationerna. Fasta randvillkor appliceras i dessa riktningar.
- v) Lucksidokarmar och bottenvägare kommer att bidra till styvheten i ramverket. Deformationerna blir beroende av lastfallet och deras styvhet är i samma storleksordning som styvheten i vebbramens element. Fjädrande randvillkor bör användas här

#### Beräkning av fjäderkonstanter för att simulera inflytandet från längskeppsgående element:

Varje vebbram i lastrummet kommer att belastas med samma "linjelaster" motsvarande det lokala trycket ggr vebbavståndet. I balkanalysen omvandlas dessa till ekvivalenta tvärkrafter  $F$  i knutpunkterna. De längskeppsgående elementen kommer således att bli belastade med  $n \cdot F$  punktlaster, där  $n$  är antal vebbramar mellan tvärskeppskotten. Då  $n$  är relativt stort kan vi approximera belastningen på längskeppsförbanden med en jämt utbredd last  $q = Q/L = n \cdot F/L$  där  $L$  är lastrumslängden.



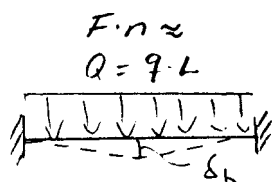
Exempel på modellering med randvillkor: vebbram forts



$$q = \frac{Q}{L}$$

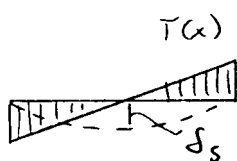
$$Q = n \cdot F$$

Böjdeformationen av längskeppsförbandet som funktion av yttre last blir om vi antar symmetri runt skottet (ur elementarfall):



$$\delta_b(x) = \frac{Q \cdot L^3}{24 \cdot E \cdot I} \left[ \left( \frac{x}{L} \right)^2 - 2 \cdot \left( \frac{x}{L} \right)^3 + \left( \frac{x}{L} \right)^4 \right]$$

Skjuvdeformationerna ur direkt integration av tvärkraften:



$$\delta_s(x) = - \int_0^x \frac{\tau}{G} dx = - \int_0^x \frac{T(x)}{G \cdot A_s} dx = \frac{-Q}{G \cdot A_s} \cdot \int_0^x \left( \frac{x}{L} - \frac{1}{2} \right) dx$$

$$\delta_s(x) = \frac{-Q}{G \cdot A_s} \cdot \left( \frac{x^2}{2 \cdot L} - \frac{x}{2} \right)$$

De största förskjutningarna erhålls för den vebbram som ligger närmast mitten av lastrummet dvs (för udda n),  $x = L/2$ . Denna vebbram får alltså det minsta styvhetstillskottet från längskeppsförbanden. Fjäderkonstanten definieras (sett från vebbramen) som  $F/\delta_{tot}$ . I vårt fall med  $Q = n \cdot F$  och  $x = L/2$  fås:

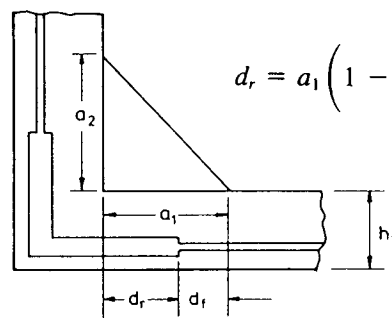
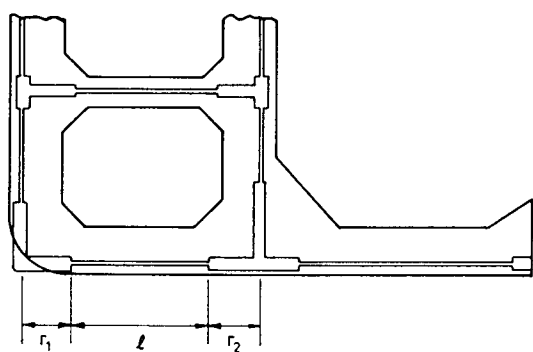
$$k_{min} = \frac{F}{(\delta_b + \delta_s)_{max}} = \frac{1}{\frac{n \cdot L^3}{384 \cdot E \cdot I} + \frac{n \cdot L}{8 \cdot G \cdot A_s}}$$

där I och  $A_s$  naturligtvis bestäms individuellt för varje enskilt längskeppsförband

## Modellering av brickområden

Brickor i balkförband fyller flera viktiga uppgifter. De ökar lokalt böjmotståndet och skjuvarean och minskar därmed spänningarna i de områden som normalt utsätts för de största tvärkrafterna och böjmomenten. De underlättar spänningsflödet i strukturen och minskar därmed lokala spänningskoncentrationer och de underlättar hopfogningen av förbanden vid tillverkningen.

För enkla balkar med väl definierade randvillkor (fast inspända) kan man approximativt ta hänsyn till brickornas förstyvande inverkan genom att räkna med att inspänningen verkar en bit ut i brickan dvs ansätta en kortare spännvidd för balken. För sammansatta balksystem med stora brickområden kan man på motsvarande sätt ansätta att balkarna i en viss del av brickområdet är helt styva medan resten av balken har konstant styvhet svarande mot balkens dimensioner utanför brickområdet. Storleken på dessa fiktiva ”styva dellängder” bör väljas olika beroende på om balken i huvudsak deformeras i skjuvning eller böjning. Ett approximativt uttryck för i huvudsak böjdeformationer ges i SSD sid 305:



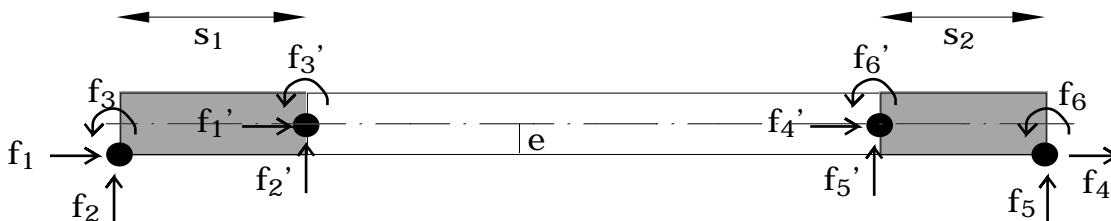
$$d_r = a_1 \left( 1 - \frac{h_1}{h_1 + a_2} \right) \quad (8.6.8a)$$

Figure 8.40 Rigid length representation of a bracket.



Om de olika balkarna som ansluter i en knutpunkt har olika livhöjder och neutrallager uppstår dessutom problem med var knutpunkterna ska placeras. Om skillnaderna är stora kan det vara betydelsefullt att ta hänsyn till kopplingen mellan axiella krafter och böjmoment pga avståndet mellan neutrallagren. Vid modelleringen lägger man systemlinjer som perfekt ansluter i noderna, medan balkarnas excentricitet (avstånd från systemlinje till neutrallager) läggs in som en balkspecifik egenskap i styvhetsmatrisen.

## Styvhetsmatris för excentrisk balk med styva dellängder



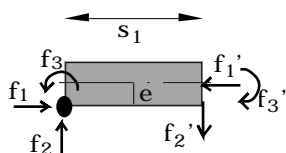
För mittsektionen gäller vanliga styvhetsrelationen (slank balk)

$$\mathbf{f}' = \mathbf{k}'_e \boldsymbol{\delta}'$$

För hela balken mellan systemnoderna söker vi

styvhetsrelationen  $\mathbf{f} = \mathbf{k}_e \boldsymbol{\delta}$  där  $\mathbf{k}_e$  innehåller inflytandet från excentricitet och styva dellängder

En jämviktsbetraktelse ger:



$$f_1 = f'_1$$

$$f_4 = f'_4$$

$$f_2 = f'_2$$

$$f_5 = f'_5$$

$$f_3 = f'_3 - e \cdot f'_1 + s_1 \cdot f'_2$$

$$f_6 = f'_6 - e \cdot f'_4 - s_2 \cdot f'_5$$

eller på matrisform

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -e & s_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e & -s_2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ f'_3 \\ f'_4 \\ f'_5 \\ f'_6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = \mathbf{H}^T \mathbf{f}'$$

på motsvarande sätt ger en kinematisk betraktelse av

förskjutningarna:

$$\boldsymbol{\delta}' = \mathbf{H} \boldsymbol{\delta}$$

vilket ger:

$$\mathbf{f} = \mathbf{H}^T \mathbf{f}' = \mathbf{H}^T \mathbf{k}'_e \boldsymbol{\delta}' = \mathbf{H}^T \mathbf{k}'_e \mathbf{H} \boldsymbol{\delta} = \mathbf{k}_e \boldsymbol{\delta}$$

den transformerade elementstyvhetsmatrisen blir således

$$\mathbf{k}_e = \mathbf{H}^T \mathbf{k}'_e \mathbf{H} \quad (\text{se SSD (8.3.3), resp (8.6.5), (8.6.6)})$$

## Skjuvdeformationer i brickhörn

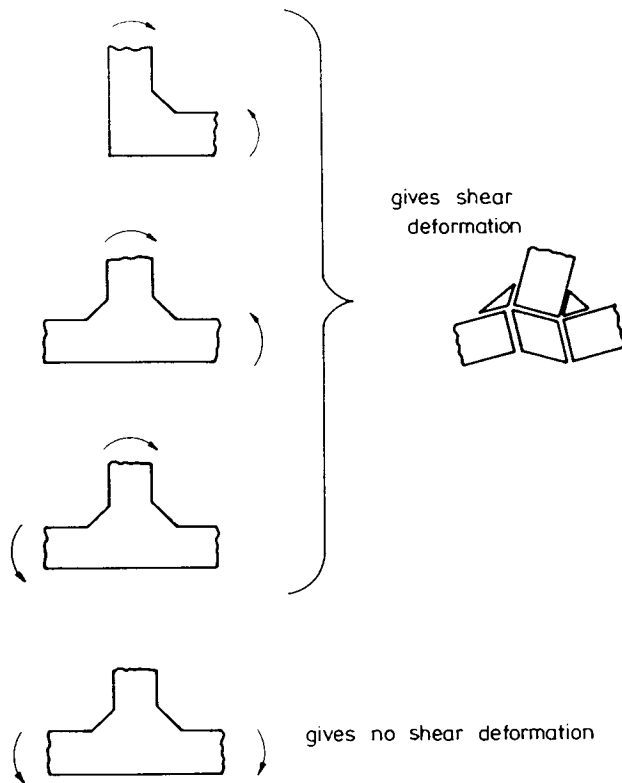
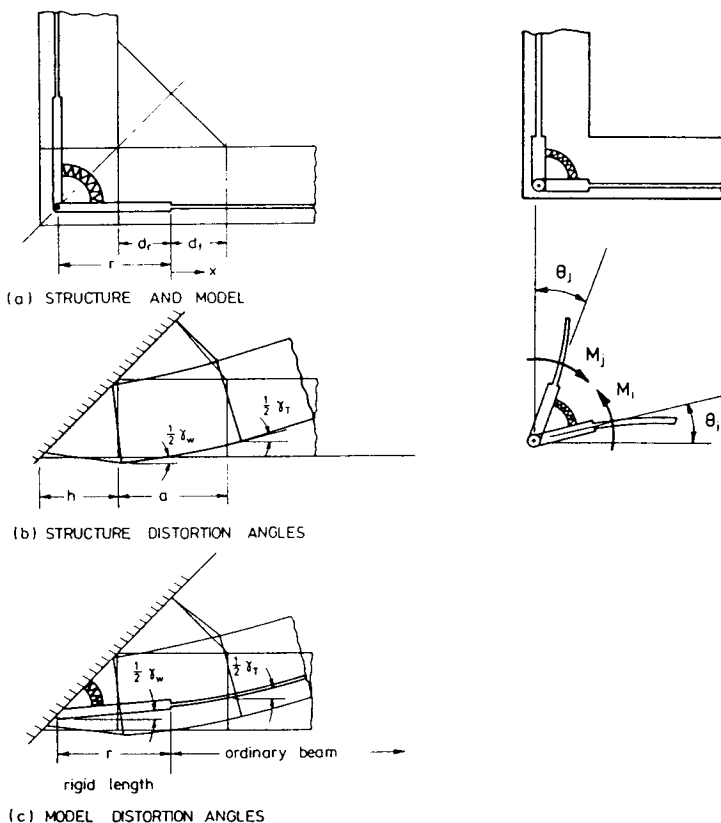


Figure 8.41 Shear deformation of joints due to bending.

Medan böjstyvheten drastiskt ökar i brickområdet och därför väl kan representeras av styva dellängder, gäller detta inte i lika hög grad skjuvstyvheten. Om brickområdet utgör en betydande del av balkarnas längd bör man vid en noggrann balkanalys ta hänsyn till den skjuvdeformation som sker inom brickområdet. I princip leder detta till att vi måste införa en oberoende rotationsfrihetsgrad för varje balkelement som ansluter i en nod istället för att - som i normalfallet - ha en enda rotationsfrihetsgrad för noden. Skjuvstyvheten kan då representeras av "rotationsfjädrar" som sammanbinder dessa oberoende frihetsgrader.



"Brick-fjäders" styvhet kan skrivas på formen

$$\mathbf{k}_j = k_j \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

där matrisen representerar kopplingen mellan de båda frihetsgraderna sammanbundna med brickan.

(Styvhetskomponenterna kan adderas till systemstyvhetsmatrisen på samma sätt som för ett vanligt element.)

Baserat på studier av Milchert (KTH, 1972), ges i SSD ett approximativt uttryck för styvheten som funktion av brickområdets geometri. (Se också det genomräknade exemplet i SSD sid 312-315).

$$k_j = 0.78 \frac{Gt_w}{\frac{1}{h_i(2h_i + a_i)} + \frac{1}{h_j(2h_j + a_j)}} \quad (8.6.18)$$

## Belastningsfall för dimensionering

Fartygets struktur och 'nominella styrka' kan i allmänhet betraktas som entydigt bestämd av konstruktionsritningarna - åtminstone så länge fartyget är nytt och utan korrosionsangrepp. Visserligen kan både dimensioner, materialkvaliteter och tillverkningsnoggrannheter variera men detta har störst betydelse för den 'lokala' stykan framför allt map utmattning.

Belastningarna däremot, kan inte på samma entydiga sätt bestämmas i förväg. Både statiska laster och väginducerade laster kommer för de flesta fartyg att variera mycket, och delvis okontrollerat under fartygets driftstid. Det är mycket svårt att på konstruktionsstadiet kunna förutse hur de största sammansatta lasterna kommer att se ut.

## Kvasi-statiska typlastfall för dimensionering av lokala bärande förband

För standard-dimensionering är man tvungen att arbeta med enkla belastningsmodeller som erfarenhetsmässigt ger en acceptabel säkerhet mot alla upptänkliga verkliga lastfall. Dessa svarar normalt mot extrema statiska lastfall med 'kvasi-statiska' tillägg för att simulera de överlagrade dynamiska belastningarna. De används för att kontrollera att spänningar (ev. deformationer) inte överskrider tillåtna gränser. Lastfallen ger däremot inte en riktig bild av hur max-spänningarna är fördelade i skrovet generellt, och ska inte användas för att lokalt optimera strukturens hållfasthet.

I klassreglerna finns tabeller över vilka lokala tryck som ska användas för dimensionering av plåtfält, förstävningar och bärande balkar, med hjälp av formlerna i regelboken.

För direkta beräkningar - som krävs för bärande balksystem eller för okonventionella konstruktionslösningar - används på motsvarande sätt representativa extrema lastfall.

På de följande sidorna ges några exempel på dimensionerande lastfall för olika typer av fartyg.

Exemplen är hämtade ur DnV Classification Notes 31.1-3

'Strength Analysis of Hull Structures in:

Bulk Carriers and Container Ships (31.1)

Roll On/Roll Off Ships (31.2)

Tankers (31.3)

## Exempel på dimensionerande lastfall OBO-fartyg

### 2.3 Ballast in wing tanks. (LC3)

2.3.1 This condition is shown in Fig. 2.3 and may be decisive for the top wing tanks and hopper tanks.

2.3.2 The design pressures due to water ballast in top wing tanks are to be taken as:

$$p_i = 10 h_s \quad \{ \text{kN/m}^2 \}$$

$h_s$  measured from a level 2.5 metres above the top of tank.

2.3.3 The design pressures due to water ballast in hopper tanks are to be taken as:

$$p_i = 6.7 h_s \quad \{ \text{kN/m}^2 \}$$

$h_s$  measured from the top of air pipes.

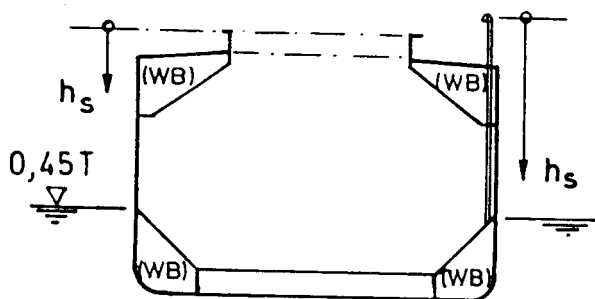


Fig. 2.3 Load condition LC3

### 2.4 Heavy ore cargo, adjacent holds empty. (LC4).

2.4.1 This condition is shown in Fig. 2.4 and may be decisive for the double bottom in ore holds and empty holds.

«Heavy ore» means ore or other heavy bulk cargo which will not occupy the complete volume when the hold is loaded to the maximum of its capacity (stowage rate less than cargo density). Consequently, only the lower structural parts of the holds will be exposed to lateral pressures from such cargo.

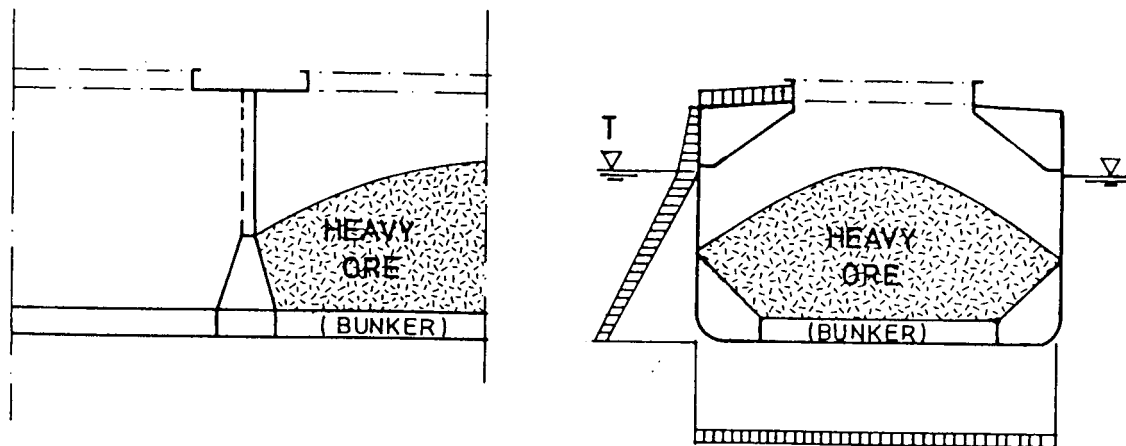


Fig. 2.4 Load condition LC4.

## Exempel på dimensionerande lastfall Containerfartyg

### 2.11 Container cargo, heeled condition. (LC11)

**2.11.1** This condition is indicated in Fig. 2.11. Detailed requirements will depend on proposed stowing and securing arrangement.

**2.11.2** The design forces due to cargo acting in the ship's vertical and transverse directions, are to be taken as:

$$P_v = g_0 M \text{ \{kN\} vertical direction}$$

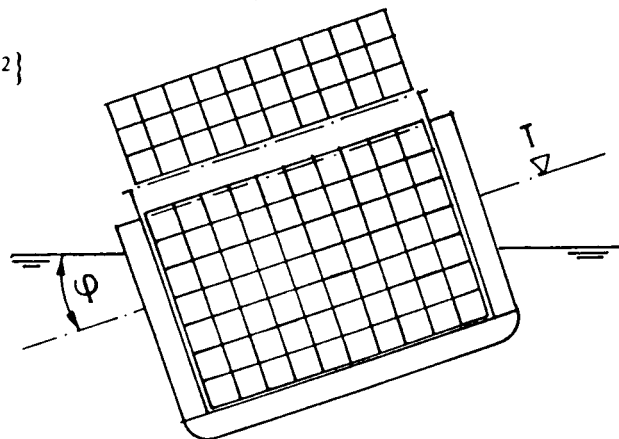
$$P_t = 0.67 a_t M \text{ \{kN\} transverse direction}$$

$M$  = relevant cargo mass in t.

**2.11.3** The design sea pressures are assumed to correspond to full draught corrected for the effects of wave form and roll.

The pressure at bilge for the emerged side is to be taken as:

$$p_e = 10 T - 5 B \tan \varphi \text{ \{kN/m}^2\}$$



**Fig. 2.11 Load condition LC11**

At a position  $T - 0.5 B \tan \varphi$  metres above base line the pressure is zero.

The pressure at bilge for the submerged side is to be taken as:

$$p_e = 10 T + 5 B \tan \varphi \text{ \{kN/m}^2\}$$

At a position  $T + 0.33 B \tan \varphi$  metres above baseline the pressure is zero.

Between given positions  $p_e$  is to be varied linearly.

If the weather deck will become partly submerged according to the above pressure distribution, sea pressures on weather deck may be disregarded when cargo loads are applied.

## Exempel på dimensionerande lastfall Ro/Ro fartyg

### 2.1 Maximum cargo on lower part of section, upright condition (LC1)

2.1.1 This condition is shown in Fig. 2.1 and may be decisive for the double bottom and lower decks. Note that the higher decks are also loaded. The total sum of static cargo load on the section need, however, normally not exceed the buoyancy on the same section. For this purpose the loads on the higher decks need not be taken as maximum permissible values.

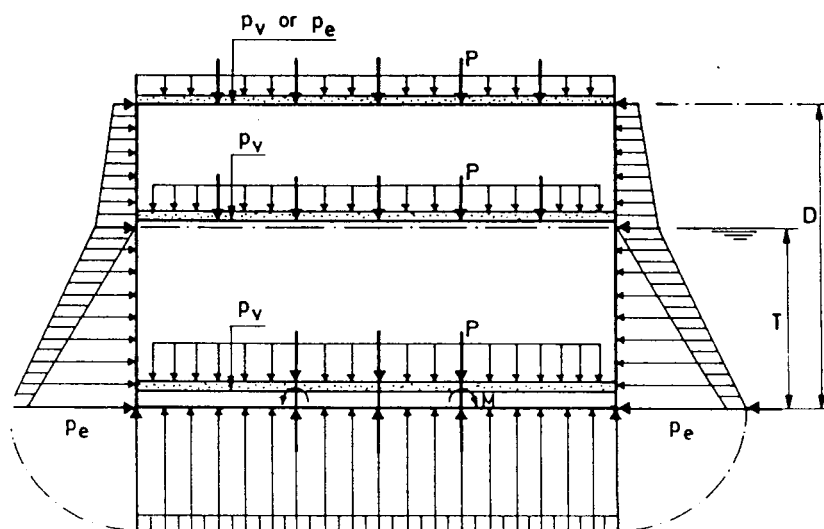
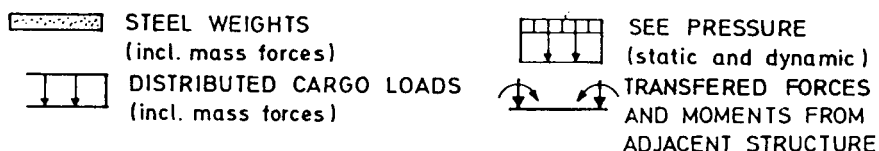


Fig. 2.1 Load condition LC1

### 2.2 Maximum cargo on lower part of section, heeled condition (LC2)

2.2.1 This condition is shown in Fig. 2.2 and may be decisive for the double bottom and lower decks.

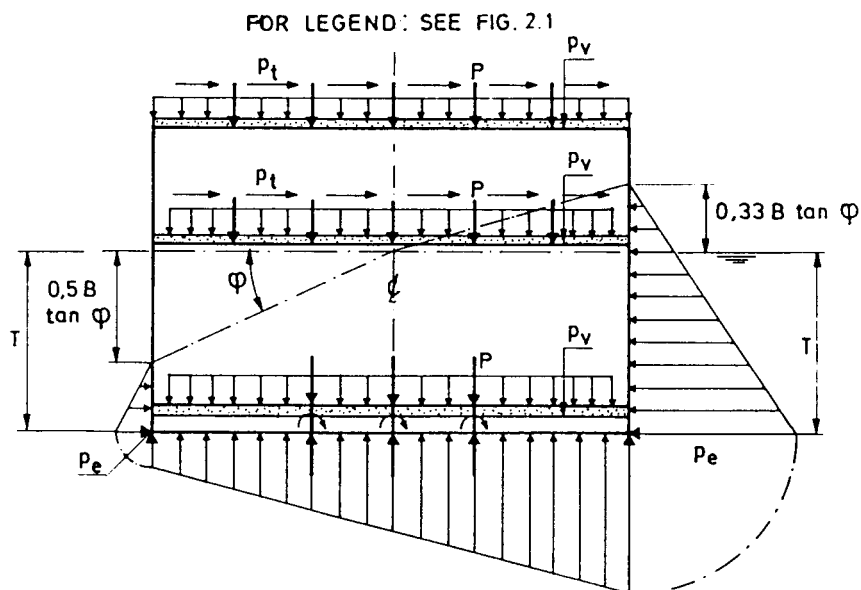


Fig. 2.2 Load condition LC2



## Exempel på dimensionerande lastfall Tankfartyg

### 2.1 Fully loaded, empty centre tank (LC1)

2.1.1 This condition is shown in Fig. 2.1 and may be decisive for the longitudinal bulkhead verticals and bottom girders in way of centre tanks.

2.1.2 The design pressures due to cargo loads are to be taken as:

$$p_i = \rho g_0 h_s + 25 \text{ \{kN/m}^2\}$$

$h_s$  measured from the top of tank.

2.1.3 The design sea pressures are to be taken as corresponding to full draught including dynamic sea pressures. I.e.:

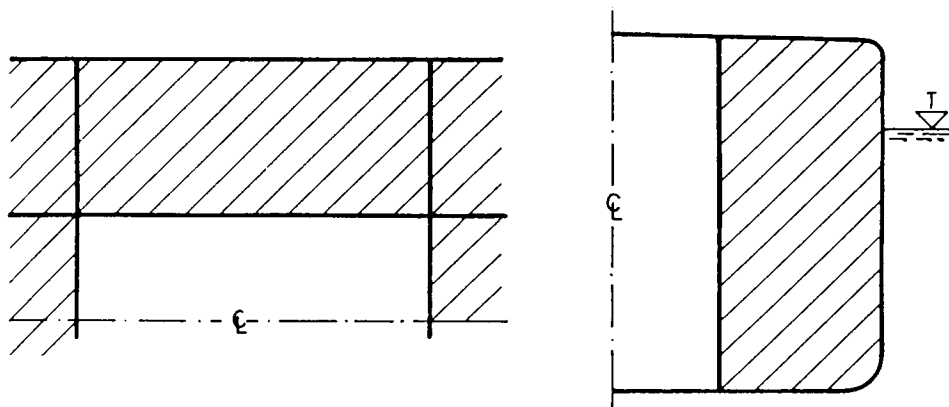


Fig. 2.1 Load condition LC1

### 2.3 Minimum ballast condition (LC3)

2.3.1 This condition is shown in Fig. 2.3 and may be decisive for the bottom, side and transverse bulkhead structures.

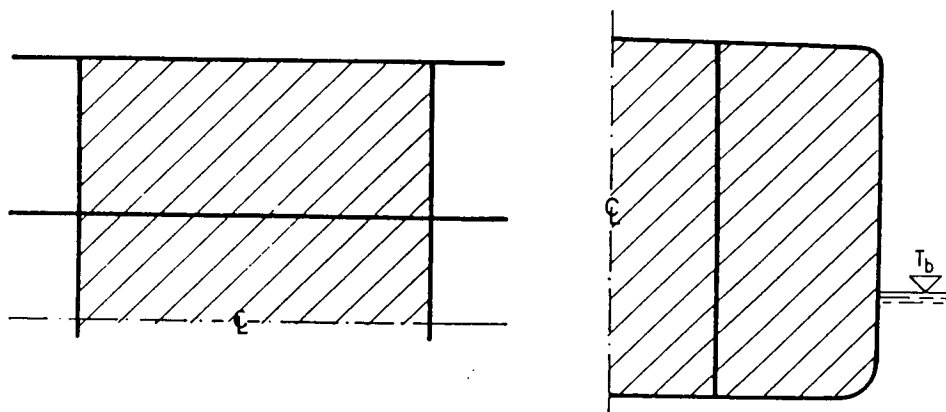
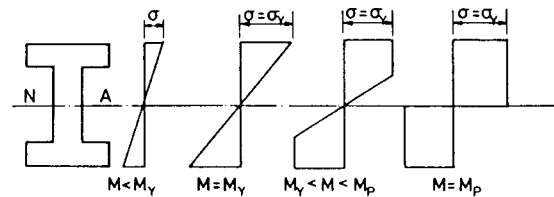
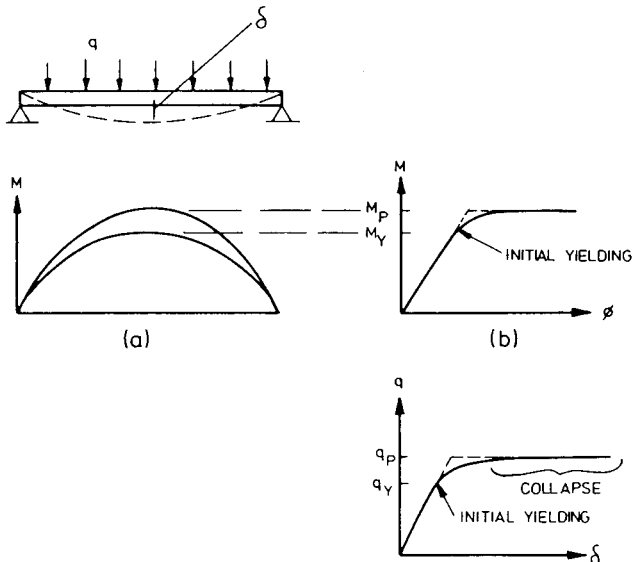


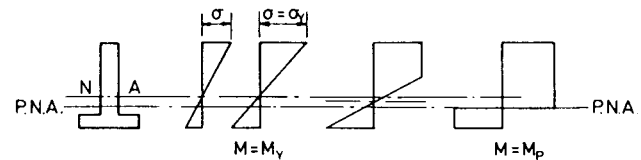
Fig. 2.3 Load condition LC3

## Plasticering av balkar

När spänningen i någon punkt utefter en balk uppnår sträckgränsen kommer balkens lastförmåga att minska. Balken kan dock fortsätta att bära ökande last tills hela tvärsnittet har uppnått sträckgränsen. (Vi förutsätter att materialet är tillräckligt duktilt för att inte töjningarna i de tidigast plasticerade delarna leder till brott innan genomplasticering.)

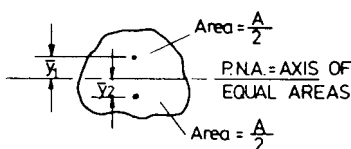


(a) Symmetric section



(b) Unsymmetric section

Det största snittmomentet som balken kan bära - det sk plastiska böjmomentet blir



$$M_p = \sigma_Y \cdot \frac{A}{2} \cdot (y_1 + y_2) = \sigma_Y \cdot Z_p$$

där  $Z_p$  kallas plastiskt böjmotstånd och alltid är större än det vanliga elastiska böjmotståndet  $Z$ .

(För "vanliga" flänsade tunnväggiga balkar i fartyg är formfaktorn  $v_s = Z_p/Z = M_p/M_Y$  i storleksordningen 1,1-1,2)

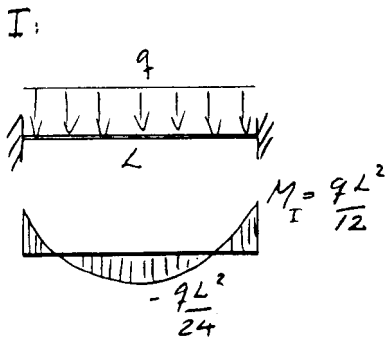
När en balk har genomplasticerats i en punkt ( $M(x) = M_p$ ) kommer en fortsatt ökad belastning att tas upp i balken som om den vore fritt upplagd i denna flytled (*plastic hinge*).

Beroende på hur balken är inspänd för övrigt kommer den att kunna bära ökande last ända tills det finns så många flytleder att balksystemet börjar fungera som mekanism.

Genom att stegvis öka lasten och införa flytleder i balksystem kan man finna gränslasten för systemet.

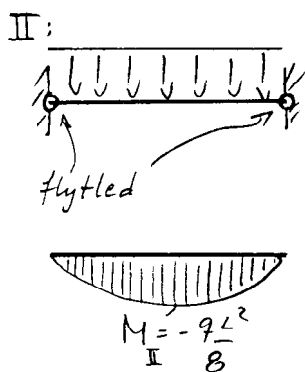
## Bestämning av gränslast med stegnings-metod (incremental)

### Exempel: Fast inspänd balk



Steg I: Lastpåläggning i det elastiska området (dvs innan någon del har genomplasticerats) de första flytlederna uppstår vid infästningspunkterna när lasten är

$$q_I = \frac{12 \cdot M_P}{L^2}$$



Steg II: Lastpåläggning efter det att flytleder införts vid infästningarna

Under steg II sker lastupptagningen som för en fritt upplagd balk eftersom inget ytterligare böjmoment kan tas upp i ändpunkterna.

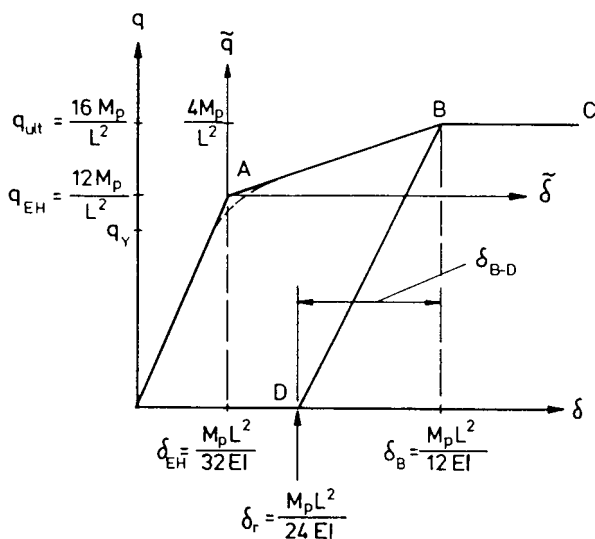
Tillskottslasten  $q_{II}$  ger upphov till böjmomenttillskottet

$$M_{II} = \frac{q_{II} \cdot L^2}{8} \quad \text{mitt på balken.}$$

När det totala böjmomentet mitt på balken blir  $M_P$  måste en ny flytled införas, varvid balken helt (om vi försummar ev axiell inspänning) tappar förmågan att bära ytterligare last.

$$M_P = \frac{q_I \cdot L^2}{24} + \frac{q_{II} \cdot L^2}{8} = \frac{12 \cdot M_P}{24} + \frac{q_{II} \cdot L^2}{8} \quad \text{vilket ger}$$

$$q_{II} = \frac{4 \cdot M_P}{L^2} \quad \text{och} \quad q_{\text{tot}} = q_I + q_{II} = \frac{16 \cdot M_P}{L^2}$$

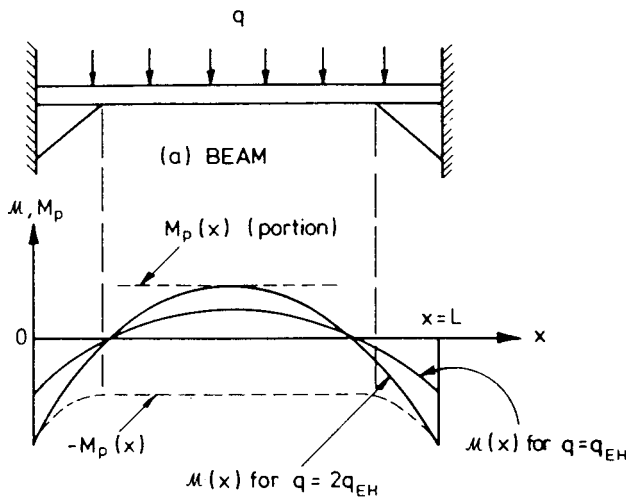


Load-deflection curve.

Gränslasten är alltså  $4/3$  av lasten för genomplasticering av ändsnitten, och  $4/3 \cdot v_S$  av lasten vid begynnande plasticering.

(Dvs om vi skulle dimensionera balken mot begynnande plasticering skulle den kunna bära i storleksordningen 50% överlast innan den kollapsar.)

## Inflytande av brickor på gränslasten



(b) PLOT OF  $\mu(x)$  AND  $M_p(x)$

Figure 16.13 Plastic collapse of a bracketed beam.

Om brickor appliceras vid infästningarna i exemplet ovan kommer  $M_p$  att öka kraftigt i de punkter där de första flytlederna uppträdde. Steg I (lastpåläggning utan flytled) kommer därför att förlängas och  $q_I$  att bli större.

Om brickorna utformas så att plastiska böjmomentet precis blir dubbelt så stor vid infästningen som  $M_p$  mitt på balken, kommer genomplasticering att inträffa samtidigt på båda ställena vid lasten

$$q_I = \frac{24 \cdot M_p}{L^2} = q_{\text{tot}}$$

varefter ingen ytterligare last kan bäras.

Brickorna har alltså ökat den totala lastkapaciteten vid kollaps jämfört med fallet utan brickor med 50% !

(Däremot har reservstyrkan efter begynnande plasticering reducerats till  $v_s$  dvs 10%-20%).

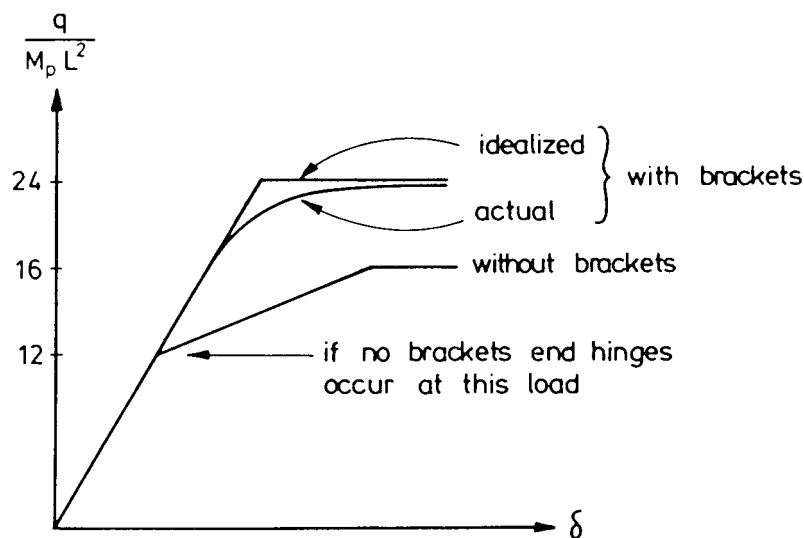


Figure 16.14 Load-deflection curve for a bracketed beam.

## Datorberäkningar av balksystem med flytleder

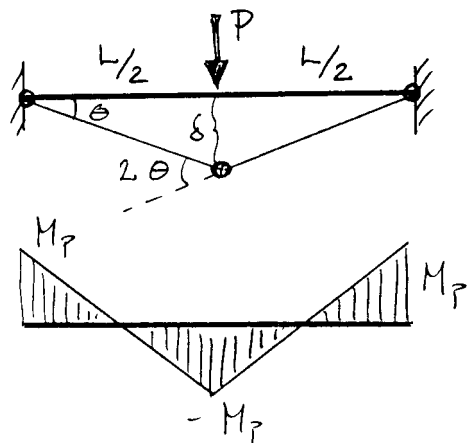
Den "inkrementella" metoden med stegvis lastpåläggning och införande av flytleder, kan systematiseras i matrisform (se SSD 16.3), och användas för datorbaserad analys av gränslasten för komplicerade strukturer. Vid varje steg måste styvhetsmatrisen uppgraderas och nya frihetsgrader införs i flytlederna ända tills styvhetsmatrisen blir singular (dvs då deformationerna inte längre kan bestämmas ur lastfallet). Metoden blir naturligtvis helt ohanterlig för handräkning och överslag för annat än mycket enkla modeller.

## Direkt metod för bestämning av gränslast i balksystem

Den direkta metoden har en helt annan utgångspunkt än den stegvisa. Istället för att steg för steg undersöka hur flytleder uppstår och skapar det slutliga kollapstillståndet, utgår man i den direkta metoden från ett kollapstillstånd och med geometriska samband och energisamband bestämmer man vilken yttre last som svarar mot detta tillstånd.

Metoden bygger på att man helt försummar inflytandet från deformationer i det elastiska området, genom att man antar att den yttre lasten inte utför något arbete förrän strukturen kollapsar! (Detta låter som en mycket grov förenkling, men i praktiken låter vi inte heller i en vanlig elastisk analys deformationerna påverka lastfördelningen).

### Exempel: punktlast mitt på fast inspänd balk



Vi identifierar lätt att kollapsmoden består av tre flytleder.

Yttre arbete: 
$$W = P \cdot \delta = P \cdot \frac{\theta \cdot L}{2}$$

Inre energi: 
$$U = M_p \cdot (\theta + 2 \cdot \theta + \theta)$$

$$U = W \quad \text{ger} \quad P_{\text{ult}} = \frac{8 \cdot M_p}{L}$$

Vilket är lika med den exakta lösningen (se fig 16.11 i SSD)

Genomför som kontroll motsvarande för jämt utbredd last enl. förra exemplet !

## Begränsningar och möjligheter med direkt plastisk analys

Det är lätt att inse att den direkta metoden leder till ojämförligt mycket enklare beräkningar för system av balkar, än vad den stegvisa metoden gör. Så länge vi begränsar oss till plana balksystem som ramverk eller gallerverk går det att utan större besvär för hand uppskatta den last som svarar mot en viss kollapsform även för system som innehåller några tiotal balkar (en uppgift jag inte skulle äta mig med vanlig elastisk analys).

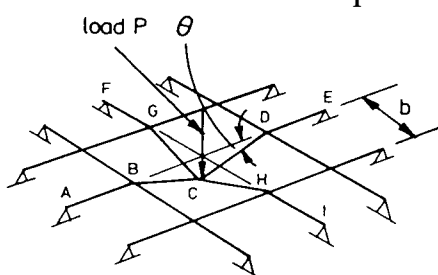
Förutsättningen är dock att kollapsformen är helt bestämd av plastisk deformation och inte av buckling eller andra instabilitetsfenomen (vilka normalt ingår i en kollaps av en tunnväggig struktur som ett fartyg!).

Svårare än att bestämma själva lastens storlek är att kontrollera att kollapsformen verkligen svarar mot gränslasten dvs den lägsta kollapslasten för strukturen.

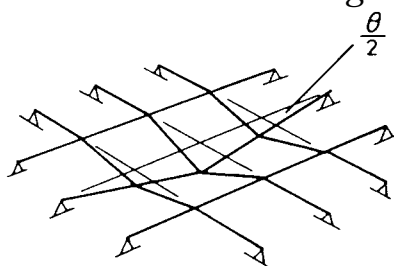
Om kollapsformen svarar mot gränslasten ska följande villkor vara uppfyllda:

- \* Den uppkomna momentfördelningen ska svara mot jämvikt med yttre krafter överallt i strukturen utan att i något element överskrida  $M_p$  (statiskt villkor)
- \* Kollapsformen ska ha tillräckligt antal flytleder för att svara mot en "mekanism". Full kompatibilitet mellan deformationer i en knutpunkt ska finnas om inte en flytled har ansatts (kinematiskt villkor)

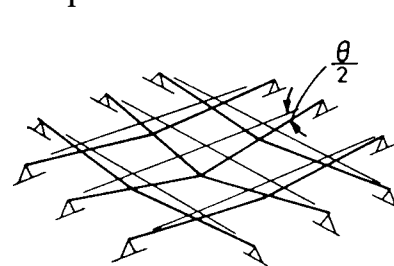
I praktiken kan man tvingas undersöka ett stort antal tänkbara kollapsformer för att hitta den lägsta kollapslasten.



$$P = \frac{8M_p}{b}$$



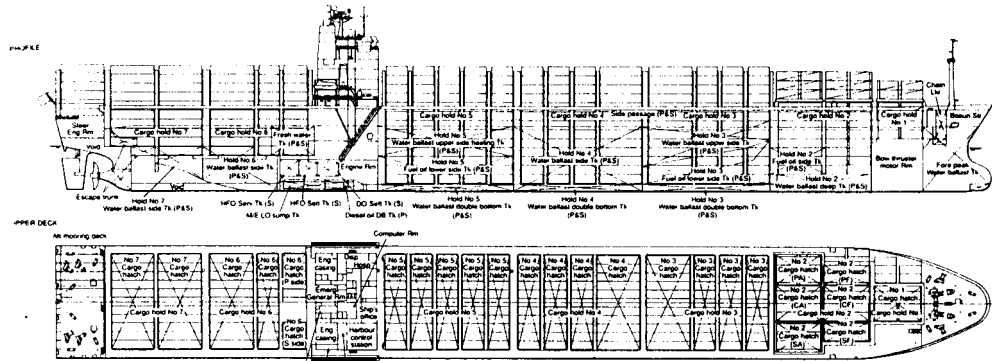
$$P = \frac{9M_p}{b}$$



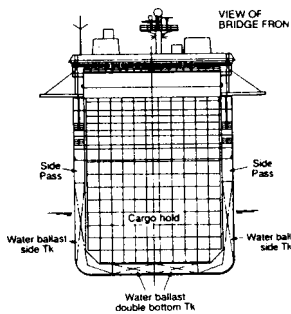
$$P = \frac{4M_p}{b}$$

## Hållfasthetsproblem hos öppna fartyg

För handelsfartyg av Lo/Lo typ finns en naturlig strävan att göra lucköppningarna så stora som möjligt för att underlätta lasthanteringen. Extremt långt har denna utveckling gått för de stora rena containerfartygen där lucköppningarna utgör i storleksordningen 90% av fartygsbredden och 70-80% av fartyglängden. Det är lätt att inse att detta leder till problem vad gäller skrovets styrka!



## Långskeppsstyrkan

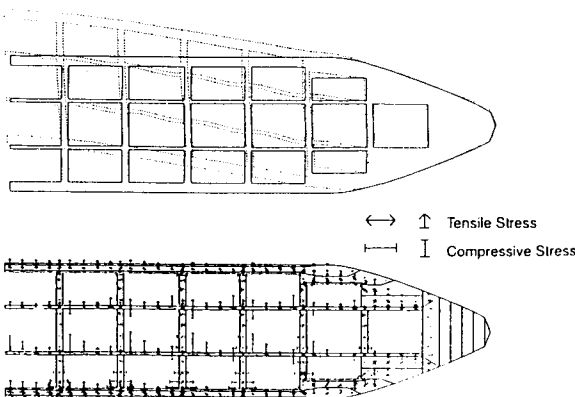


- \* Problem med att kunna få tillräckligt vertikalt böjmotstånd i skrovbalken. Neutrallagret hamnar nära botten i skrovsektionen och böjmotståndet måste höjas genom mycket plåt i övre däck.

## Tvårskeppsstyrkan

- \* Låg styvhet i däckstrimlorna leder till stora tvårskeppsdeformationer och höga inspänningsmoment i slagen. Vanligen krävs dubbel bordläggning och en förstärkt box i övre däck

## Vridstyvheten



Vridstyvheten för en öppen fartygsektion blir mycket låg. Om större delen av fartyget är öppet ger detta stora vålvdeformationer i den öppna delen med åtföljande böjning av tvärskeppstrimlorna. I anslutningen mellan öppna och slutna sektioner (maskinrum, ändskepp) uppstår höga lokala deformationer och vålvspänningar.

Deformations and stresses of the upper deck of a container ship (forward part)

## Grundläggande teori för torsion av prismatiska tunnväggiga balkar

För att förstå de problem som uppstår vid torsionsbelastning av öppna fartyg, ska vi använda den enklaste teoribildningen kring välvtorsion i prismatiska, tunnväggiga balkar. Den är inte direkt användbar för fartygssektioner eftersom fartygs verkliga varierande skrovsektioner med slutna celler, tvärskeppsstrimlor etc leder till en mycket mera komplicerad verklighet som inte i detalj kan beskrivas analytiskt utan måste beräknas numeriskt med t ex FEM. Däremot kan vi med hjälp av den förenklade teorin introducera begrepp och samband som har stor betydelse för dimensionering av öppna fartyg, t ex: Torsionsmoment, Bimoment, Vridning, Vällvning, Vällvnormal- och välvskjuvspänningar.

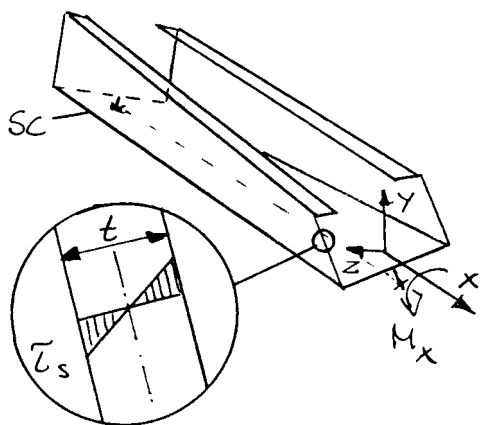
Den förenklade teorin kan också användas för mycket grova överslag av globala tillskottspänningar pga torsion

### Öppen sektion - Torsion utan vällvningshinder

För all vridning utan vällvhinder - sk St. Venantsk torsion beskrivs sambandet mellan torsionsmoment och vridning:

$$M_x = G \cdot K \cdot \theta'(x)$$

där  $G = \text{skjuvmodulen } E/(2(1+\nu))$   
 $K = \text{vridstyvhets tvärsnittsfaktor (i SSD benämnd J)}$



Överallt i sektionen (oavsett hur den är formad) kommer skjuvspänningen att variera linjärt med medelvärdet 0 mitt i plåtfältet. Integrerar vi skjuvspänningarna över tjockleken får vi för maxskjuvspänningen i plåtens utsidor:

$$\tau_s = \frac{M_x}{K} \cdot t = G \cdot t \cdot \theta' \quad \text{där} \quad K = \frac{1}{3} \cdot \int_0^b t^3 ds$$

$b = \text{totala båglängden av sektionen}$

Eftersom medelskjuvspänningen är noll kommer plåtfältet inte att deformeras i skjuvning, däremot kommer vridningen att resultera i en stelkroppsförskjutning av tvärsnittet så fort det är utformat på något annat sätt än en plan plåt.



## Välvning

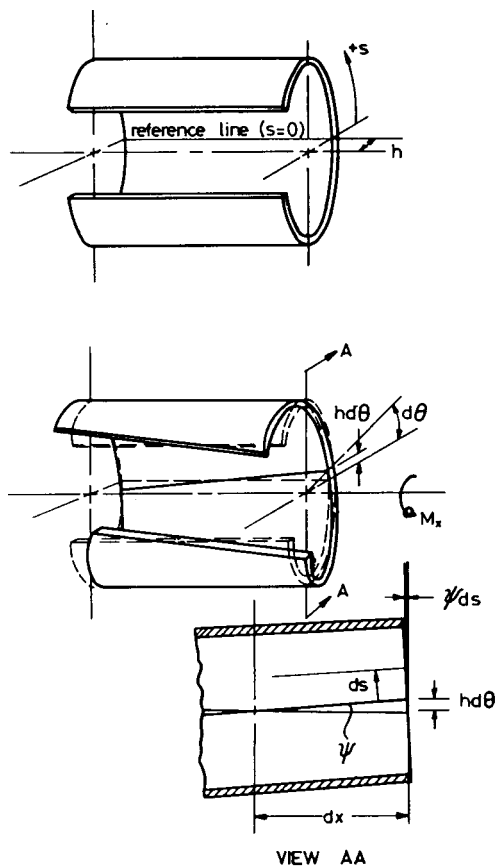


Figure 6.4 Warping in an open section.

I en öppen sektion kommer vridningen att resultera i en snedställning av tvärsnittet motsvarande en 'spiralvinkel'  $\psi = h \cdot d\theta/dx$ .

Tvärsnittets förskjutning i längsled blir

$$u(s) = - \int_0^s h(s) ds \cdot \theta' = -\omega_n(s) \cdot \theta'$$

där  $h(s)$  är det vinkelräta avståndet från ett fritt vridcentrum till sektionenkoordinaten  $s$  som räknas positiv medurs runt  $x$ -axeln, och där integralen utgår från en sk 'sektornollpunkt' dvs en punkt där välvningen är noll (t ex ett symmetrisnitt).  $\omega_n(s)$  kallas normerad sektoriell koordinat eller välvfunktion, (*normalized warping function, unit warping*) och bestämmer således välvningens fördelning i tvärsnittet. (I SSD används omvänt tecken för  $\omega_n$  vilket är ologiskt och ovanligt!)

Vid fri vridning, utan överlagrad böjning eller axiell töjning, kommer vridcentrum att vara = skjuvcentrum. De axiella förskjutningarna i en sektion pga välvning ska då uppfylla villkoren:

$$\int_0^b \omega_n(s) \cdot t ds = 0 \quad \text{ingen nettoförskjutning i axiell led}$$

$$\int_0^b y \cdot \omega_n(s) \cdot t ds = 0 \quad \text{ingen vertikal böjning}$$

$$\int_0^b z \cdot \omega_n(s) \cdot t ds = 0 \quad \text{ingen horisontell böjning}$$

Dessa samband kan användas för att beräkna skjuvcentrums läge.

## Beräkning av skjuvcentrums läge och normerad sektoriell koordinat

Den normerade sektoriella koordinaten kan skrivas som

$$\omega_n(s) = \omega(s) - \omega_0 \quad \text{där} \quad \omega(s) = \int_0^s h(s) ds$$

Där  $\omega_0 = 0$  om integrationen börjar i en sektornollpunkt.

För en symmetrisk sektion ligger skjuvcentrum alltid i symmetriplanet. Vi kan bestämma skjuvcentrum genom att beräkna sektoriella koordinaten  $\omega(s)$  kring en godtycklig pol D i symmetriplanet. Avståndet mellan polen och det verkliga skjuvcentrum  $y_0$  fås ur:

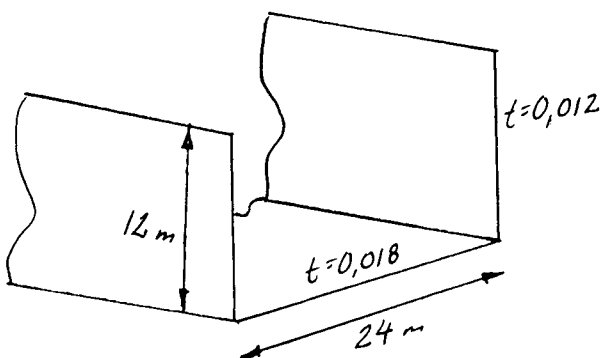
$$y_D - y_0 = \frac{- \int_0^b z(s) \cdot \omega_D(s) \cdot t ds}{I_y} \quad \text{där} \quad I_y = \int_0^b z(s)^2 \cdot t ds$$

$I_y$  är vanliga tröghetsmomentet runt symmetriaxeln  $y$ .

Den normerade sektoriella koord. kan slutligen beräknas som

$$\omega_n(s) = \omega_D(s) + (y_D - y_0) \cdot z(s)$$

**Exempel: Beräkning av skjuvcentrum, vridstyvhets tvärsnittsfaktor och normerad sektoriell koordinat för en öppen tunnväggig sektion.**



Vi börjar med att beräkna tyngdpunkten och placera vår x-axel genom denna:

$$TP_{tot} = \frac{\sum (A_i \cdot TP_i)}{\sum (A_i)}$$

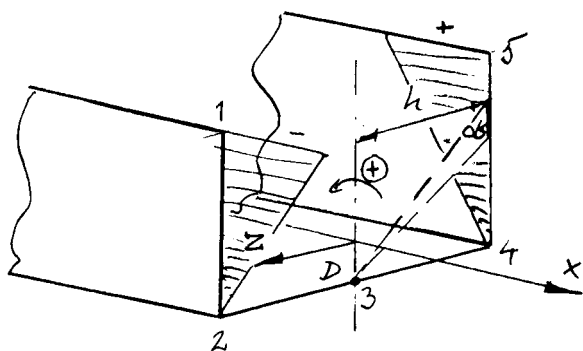
med baslinjen som referens får vi

$$TP_{tot} = \frac{(12 \cdot 0.012 \cdot 6) + (24 \cdot 0.018 \cdot 0) + (12 \cdot 0.012 \cdot 6)}{(12 \cdot 0.012) + (24 \cdot 0.018) + (12 \cdot 0.012)} = 2.40$$

dvs tyngdpunkten ligger 2,4 m över baslinjen

Exempel: Beräkning av skjuvcentrum etc (forts)

Vi beräknar nu sektoriella koordinaten med utgångspunkt från en pol D i skärningen mellan CL och BL. Observera att positiv integrationsriktning runt sektionen är medurs betraktat längs x-axeln. Sektoriella koordinaten blir



$$\omega_D(s) = \int_0^s h_D(s) ds$$

$$\omega_3 = 0$$

$$3-2: \omega_2 = \omega_3 + 0 \cdot 12 = 0$$

$$2-1: \omega_1 = \omega_2 - 12 \cdot 12 = -144 \text{ m}^2$$

$$3-4: \omega_4 = \omega_3 + 0 \cdot 12 = 0$$

$$4-5: \omega_5 = \omega_4 + 12 \cdot 12 = 144 \text{ m}^2$$

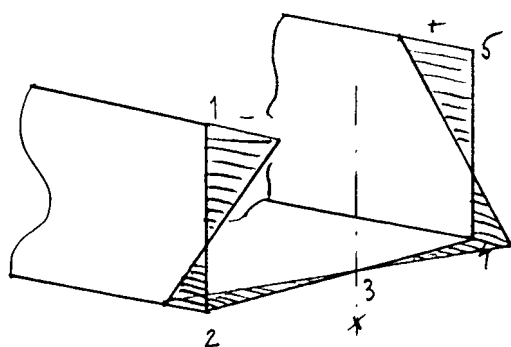
För bestämning av skjuvcentrums läge behöver vi "sektoriellt deviationsmoment" runt D samt ytttröghetsmoment runt y-axeln ( $I_y$ ).

$$\int_0^b z(s) \cdot \omega_D(s) \cdot t ds = 2 \cdot \left[ 0 + \int_0^{12} 12 \cdot (-12 \cdot s) \cdot 0.012 ds \right] = -248.8 \text{ m}^5$$

$$I_y = \left[ 2 \cdot (12 \cdot 0.012 \cdot 12^2) + \frac{0.018 \cdot 24^3}{12} \right] = 62.2 \text{ m}^4$$

$$y_D - y_0 = \frac{-(-248.8)}{62.2} = 4 \text{ m}$$

Dvs skjuvcentrum ligger 4 m under BL - 6.4 m under TP. Vi räknar nu normerad sektoriell koordinat med skjuvcentrum som pol:



$$\omega_{n3} = 0$$

$$3-2: \omega_{n2} = 0 + 4 \cdot 12 = 48 \text{ m}^2$$

$$2-1: \omega_{n1} = -144 + 4 \cdot 12 = -96 \text{ m}^2$$

$$3-4: \omega_{n4} = 0 + 4 \cdot (-12) = -48 \text{ m}^2$$

$$4-5: \omega_{n5} = 144 + 4 \cdot (-12) = 96 \text{ m}^2$$

Exempel: Beräkning av skjuvcentrum etc (forts)

Vridstyvhetens tvärsnittsfaktor K:

$$K = \frac{1}{3} \cdot \sum (b \cdot t^3)_i = \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot (12 \cdot 0.012^3) + 24 \cdot 0.018^3)$$

$$K = 6.05 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

## Öppen sektion - Torsion med välvningshinder

Välvningshinder i någon form uppträder alltid då sektionens form inte är konstant (olika sektoriell koordinat) eller då vridmomentet inte är konstant (olika  $\theta'$ ). (Välvningshinder kan också uppträda genom yttre inspänning, men för fartygsskrov är detta knappast aktuellt.)

### Välvnormalspänningar

Så fort välvförskjutningen varierar i x-led uppstår det töjningar och därtillhörande normalspänningar i sektionen:

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x = E \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = E \cdot \frac{\partial}{\partial x} (-\omega_n \cdot \theta') = -E \cdot \omega_n \cdot \theta''$$

eftersom välvningen är konstant över tjockleken är också dessa välvspänningar  $\sigma_x(s, x)$  konstanta över tjockleken.

$$\left( \sigma_x t + \frac{\partial \sigma_x t}{\partial x} dx \right) ds - \sigma_x t ds + \left( q_2 + \frac{\partial q_2}{\partial s} ds \right) dx - q_2 dx = 0$$

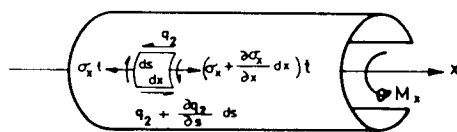


Figure 6.7 Stresses due to warping restraint.

Kopplat till välvnormalspänningarna

uppträder välvskjuvspänningar  $\tau_2$

konstanta över tjockleken och överlagrade de fria vridskjuvspänningarna  $\tau_s$ .

Ur en jämviktsbetraktelse erhålls:

$$\frac{\partial \tau_2}{\partial s} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0 \quad \text{dvs} \quad \tau_2 = \int \partial \tau_2 = - \int \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \cdot \partial s$$

### Välvskjuvspänningar

Om vi börjar integrationen vid en punkt där skjuvspänningarna är noll (fri kant) får vi:

$$\tau_2(s, x) = - \int_0^s -E \cdot \theta'''(x) \cdot \omega_n(s) ds = E \cdot \theta'''(x) \cdot \int_0^s \omega_n(s) ds$$

eller för skjuvflödet:

$$q_2(s, x) = E \cdot \theta'''(x) \cdot \int_0^s \omega_n(s) \cdot t ds$$

där integralen benämns sektoriella statiska momentet

## Välvtorsionsmomentet

Om man integrerar välvskjuvflödet  $q_2 = \tau_2 \cdot t$  över hela sektionens tvärsnitt får man pga den varierande välvningen ett sekundärt torsionsmoment:

$$M_{x2} = -E \cdot I_{\omega} \cdot \theta'''(x) \quad \text{där} \quad I_{\omega} = \int_0^b \omega_n^2 \cdot t \, ds$$

det senare kallat sektoriellt tröghetsmoment (härledn i SSD).

Det totala torsionsmomentet kommer att bestå av dels St Venantskt moment från fria skjuvspänningar och dels moment från välvskjuvspänningarna:

$$M_x = M_{x1} + M_{x2} = G \cdot K \cdot \theta'(x) - E \cdot I_{\omega} \cdot \theta'''(x)$$

uttrycket är "vridningsvinkelns differentialekvation"

## Bimoment

Om vi påtvingar ett snitt en virtuell välvning kan vi ställa upp energisamband och identifiera ytterligare en snittstorhet som är en inre jämviktsgrupp,

Bimomentet:

$$M_{\omega}(x) = \int_0^b \sigma_x(x, s) \cdot \omega_n(s) \cdot t \, ds = -E \cdot \theta''(x) \cdot \int_0^b \omega_n^2 \cdot t \, ds$$

dvs

$$M_{\omega}(x) = -E \cdot I_{\omega} \cdot \theta''(x) \quad M_{x2} = M'_{\omega}$$

och sammanfattningsvis för spänningstillståndet pga förhindrad välvning:

$$\sigma_x = \frac{M_{\omega}}{I_{\omega}} \cdot \omega_n \quad \tau_2 = \frac{-M_{x2}}{t \cdot I_{\omega}} \cdot S_{\omega} \quad \text{där} \quad S_{\omega} = \int_0^s \omega_n(s) \cdot t \, ds$$

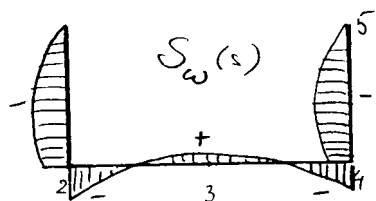
Vi ser att uttrycken blir analoga med böj- resp skjuvspännings-tillståndet vid balkböjning.

## Exempel: Beräkning av sektoriellt statistiskt moment och sektoriellt tröghetsmoment

Vi fortsätter med samma förenklade tvärsnitt som vi räknat ut sektoriella koordinaten för tidigare.

Sektoriella statistiska momentet är

$$S_{\omega} = \int_0^s \omega_n(s) \cdot t \, ds$$



där integrationen måste utgå från ett känt nollställe för skjuvspänningarna. Vi börjar i pkt 1:

$$S_{\omega 12} = \int_0^{12} (-96 + 12 \cdot s) \cdot t \, ds = 0.012 \cdot (-96 \cdot s + 6 \cdot s^2)$$

$$S_{\omega 2} = -3.45 \, \text{m}^4$$

$$S_{\omega 23} = S_{\omega 2} + \int_0^{23} (48 - 4 \cdot s) \cdot t \, ds = 0.018 \cdot (48 \cdot s - 2s^2)$$

$$S_{\omega 3} = -3.45 + 5.18 = 1.73 \, \text{m}^4$$

och vidare symmetriskt map CL. Lokala extremvärden erhålles där sektoriella koordinaten är noll. Det största beloppet uppträder i sidan, 4 m över BL:  $S_{\omega} = -4.61 \, \text{m}^4$

Sektoriella tröghetsmomentet integreras fram

$$I_{\omega} = \int_0^b \omega_n^2 \cdot t \, ds$$

$$I_{\omega} = 2 \cdot \left[ \int_0^{12} (-96 + 12 \cdot s)^2 \cdot 0.012 \, ds + \int_0^{12} (48 - 4 \cdot s)^2 \cdot 0.018 \, ds \right]$$

ger

$$I_{\omega} = 995.328 \, \text{m}^6$$

Vi har nu beräknat alla sektionsstorheter ( $K$ ,  $I_{\omega}$ ) och alla sektionsfördelningar ( $\omega_n(s)$ ,  $S_{\omega}(s)$ ) som behövs för att beräkna spänningar pga vridning. Det som återstår är att bestämma snittstorheterna ( $M_x(x)$ ,  $M_{\omega}(x)$ ,  $\theta(x)$ ) som funktion av yttre laster och randvillkor.

**Sammanfattning: sektionsfördelningar, sektionsstorheter, snittstorheter, deformationer och spänningar för torsionsbelastad öppen sektion**

Vridstyvhets tvärsnittsfaktor:

$$K = \frac{1}{3} \int_0^b t^3 ds$$

(tors.1)

Normerad sektoriell koordinat: (skjuvc. som pol, pos medurs)

$$\omega_n(s) = \int_0^s h_0(s) ds$$

(tors.2)

Skjuvcentrums läge: (D är godt. pol i symmetrisnittet)

$$y_D - y_0 = \frac{- \int_0^b z(s) \cdot \omega_D(s) \cdot t ds}{I_y} \quad \text{där} \quad I_y = \int_0^b z(s)^2 \cdot t ds$$

(tors.3)

Sektoriellt statistiskt moment:

$$S_{\omega}(s) = \int_0^s \omega_n(s) \cdot t ds$$

(tors.4)

Sektoriellt tröghetsmoment:

$$I_{\omega} = \int_0^b \omega_n^2 \cdot t ds$$

(tors.5)

Välvning:

$$u(s, x) = -\omega_n(s) \cdot \theta'(x)$$

(tors.6)

Sammanfattning, öppen sektion, (forts)

Torsion utan välvningshinder (fri torsion, St Venantsk torsion)

Torsionsmoment:

$$M_{x1}(x) = G \cdot K \cdot \theta'(x) \quad (\text{tors.7})$$

Vridskjuvspänning:

$$\tau_s(s, x) = \frac{M_x(x)}{K} \cdot t(s) = G \cdot t(s) \cdot \theta'(x) \quad (\text{tors.8})$$

Torsion med välvningshinder (välvtorsion, Vlasovsk torsion)

Torsionsmoment:

$$M_{x2}(x) = -E \cdot I_\omega \cdot \theta'''(x) \quad (\text{tors.9})$$

Bimoment:

$$M_\omega(x) = -E \cdot I_\omega \cdot \theta''(x) = \int_0^x M_{x2}(x) \, dx \quad (\text{tors.10})$$

Välvskjuvspänning:

$$\tau_2(s, x) = \frac{-M_{x2}(x)}{t(s) \cdot I_\omega} \cdot S_\omega(s) = E \cdot \theta'''(x) \cdot \frac{S_\omega(s)}{t(s)} \quad (\text{tors.11})$$

Välvnormalspänning:

$$\sigma_x(s, x) = \frac{M_\omega(x)}{I_\omega} \cdot \omega_n(s) = -E \cdot \theta''(x) \cdot \omega_n(s) \quad (\text{tors.12})$$

Sammansatt torsion

Vridningsvinkelns differentialekvation:

$$M_x(x) = G \cdot K \cdot \theta'(x) - E \cdot I_\omega \cdot \theta'''(x) \quad (\text{tors.13})$$



## Lösning till vridningsvinkelns differentialekvation

$$M_x(x) = G \cdot K \cdot \theta'(x) - E I_{\omega} \cdot \theta'''(x)$$

Om man uttrycker förvridningen  $\theta$  som funktion av ett yttre fördelat torsionsmoment per längdenhet  $m(x) = -M_x'(x)$  blir

$$m(x) = E I_{\omega} \cdot \theta''''(x) - G \cdot K \cdot \theta''(x)$$

$$\theta''''(x) - \frac{G \cdot K}{E I_{\omega}} \cdot \theta''(x) = \frac{m(x)}{E I_{\omega}} \quad \text{eller}$$

$$\theta''''(x) - k^2 \cdot \theta''(x) = \frac{k^2}{G \cdot K} \cdot m(x) \quad \text{där} \quad k = \sqrt{\frac{G \cdot K}{E I_{\omega}}}$$

Den homogena lösningen till denna diff.ekvation svarar mot fallet med konstant torsionsmoment över hela längden, dvs inget yttre utbrett moment:

$$\theta_h(x) = C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot \sinh(k \cdot x) + C_4 \cdot \cosh(k \cdot x)$$

där konstanterna löses ur randvillkoren på vanligt sätt. Det är lämpligt att skriva ekvationen som funktion av randvillkoren vridning, välvning, bimoment och torsionsmoment i balkens ena ände ( $x=0$ ). Deriveras vridningsvinkeln 1, 2 resp 3 steg erhålls vidare uttryck för välvningens fördelning, bimomentets fördelning samt välvtorsionens fördelning:

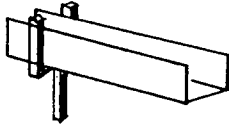
(tors.14)

$$\begin{aligned} \theta_h(x) &= \theta_0 + \left( \frac{\sinh(k \cdot x)}{k} \right) \cdot \theta'_0 + (1 - \cosh(k \cdot x)) \cdot \frac{M_{\omega 0}}{G \cdot K} + \left( x - \frac{\sinh(k \cdot x)}{k} \right) \cdot \frac{M_{x0}}{G \cdot K} \\ \theta'_h(x) &= \cosh(k \cdot x) \cdot \theta'_0 + (-k \cdot \sinh(k \cdot x)) \cdot \frac{M_{\omega 0}}{G \cdot K} + (1 - \cosh(k \cdot x)) \cdot \frac{M_{x0}}{G \cdot K} \\ \frac{M_{\omega h}(x)}{G \cdot K} &= \frac{-\theta''(x)}{k^2} = -\frac{\sinh(k \cdot x)}{k} \cdot \theta'_0 + \cosh(k \cdot x) \cdot \frac{M_{\omega 0}}{G \cdot K} + \frac{\sinh(k \cdot x)}{k} \cdot \frac{M_{x0}}{G \cdot K} \\ \frac{M_x(x)}{G \cdot K} &= \frac{M_{x0}}{G \cdot K} \quad \text{varav välvtorsion} \quad \frac{M_{x2}(x)}{G \cdot K} = \frac{-\theta''''(x)}{k^2} \end{aligned}$$

## Randvillkor för torsionsbelastad balk

$$\theta = 0$$

$$\theta' \neq 0$$

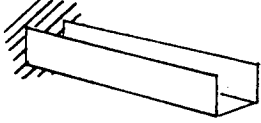


Randvillkoren utgörs av vridning, välvning, bimoment och torsionsmoment.

Om vridningen är förhindrad kan samtidigt välvningen vara antingen fri - 'gaffel-lagring' - eller förhindrad - 'fast inspänning' (helt i analogi med balkböjningens fritt upplagd resp momentinspänd).

$$\theta = 0$$

$$\theta' = 0$$



Om vridningen är fri kan välvningen vara förhindrad (detta motsvarar i balkböjningen förhindrad rotation - fri förskjutning vilket är ett vanligt randvillkor för symmetrisnitt) eller fri (vilket motsvarar helt fri utböjning).

$$\theta \neq 0$$

$$\theta' = 0$$



Om välvningen är fri i en obelastad balkände är bimomentet noll.

Exempel: Konstant torsionsmoment över en öppen balk med välvfria ändsnitt:



Randvillkoren blir:

$$\theta(0) = 0 \text{ (sättes som referenspunkt)}$$

$$M_{\omega}(0) = M_{\omega}(L) = 0$$

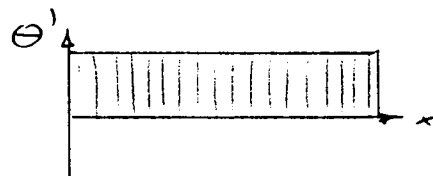
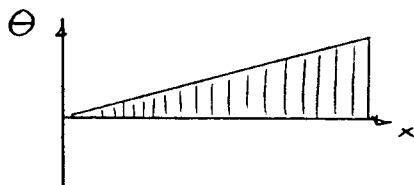
$$M_x(x) = M_{x0} = \text{konstant}$$

ur det kända randvillkoret för bimomentet vid  $x = L$  kan vi lösa ut den obekanta  $\theta'(0)$ :

$$\frac{M_{\omega}(L)}{G \cdot K} = -\frac{\sinh(k \cdot L)}{k} \cdot \theta'_0 + \cosh(k \cdot L) \cdot 0 + \frac{\sinh(k \cdot L)}{k} \cdot \frac{M_{x0}}{G \cdot K} = 0$$

ger  $\theta'_0 = \frac{M_{x0}}{G \cdot K}$  och därmed

$$\theta(x) = \frac{M_{x0}}{G \cdot K} \cdot x \quad \theta'(x) = \frac{M_{x0}}{G \cdot K} \quad \text{dvs ren St Venantsk torsion!}$$



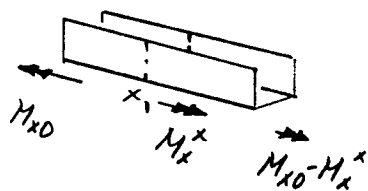
## Torsionslaster utesfater balkens längd

Om balken är belastad mellan ändpunkterna får man addera en partikulärlösning till den homogena lösningen på vridningsvinkelns differentialekvation. Denna lösning kan man finna genom att snitta balken vid den yttre lasten och succesivt lösa ekvationerna för balkens delängder. Vi kan identifiera några typfall:

### Punktangripande torsionsmoment $M_x^x$ vid koordinaten $x_1$

För  $x < x_1$  gäller den homogena lösningen enligt (tors.14).

För  $x > x_1$  gäller: (tors.15)



$$\theta(x) = \theta_h(x) - \left[ x - x_1 - \frac{\sinh(k \cdot (x - x_1))}{k} \right] \cdot \frac{M_x^x}{G \cdot K}$$

$$\theta'(x) = \theta'_h(x) - (1 - \cosh(k \cdot (x - x_1))) \cdot \frac{M_x^x}{G \cdot K}$$

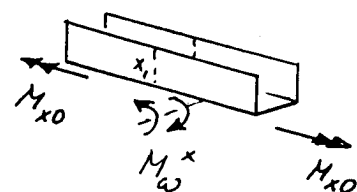
$$\frac{M_\omega(x)}{G \cdot K} = \frac{M_{\omega h}(x)}{G \cdot K} - \left[ \frac{\sinh(k \cdot (x - x_1))}{k} \right] \cdot \frac{M_x^x}{G \cdot K}$$

$$\frac{M_x(x)}{G \cdot K} = \frac{M_{x0}(x)}{G \cdot K} - \frac{M_x^x}{G \cdot K}$$

### Punktangripande bimoment $M_\omega^x$ vid koordinaten $x_1$

För  $x < x_1$  gäller den homogena lösningen enligt (tors.14).

För  $x > x_1$  gäller: (tors.16)



$$\theta(x) = \theta_h(x) - (1 - \cosh(k \cdot (x - x_1))) \cdot \frac{M_\omega^x}{G \cdot K}$$

$$\theta'(x) = \theta'_h(x) - (-k \cdot \sinh(k \cdot (x - x_1))) \cdot \frac{M_\omega^x}{G \cdot K}$$

$$\frac{M_\omega(x)}{G \cdot K} = \frac{M_{\omega h}(x)}{G \cdot K} - (\cosh(k \cdot (x - x_1))) \cdot \frac{M_\omega^x}{G \cdot K}$$

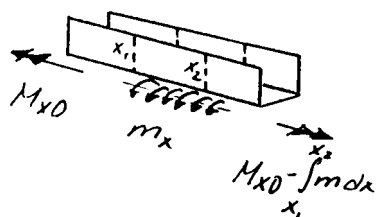
$$\frac{M_x(x)}{G \cdot K} = \frac{M_{x0}(x)}{G \cdot K}$$

I bägge fallen anger index  $h$  den homogena lösningen enligt (tors.14).

## Fördelat torsionsmoment $m_x(x)$ mellan koordinaterna $x_1$ och $x_2$

För  $x < x_1$  gäller den homogena lösningen enligt (tors.14).

För  $x > x_1$  gäller: (tors.17)



$$\theta(x) = \theta_h(x) - \frac{1}{G \cdot K} \int_{x_1}^x \left[ x - \xi - \frac{\sinh(k \cdot (x - \xi))}{k} \right] \cdot m_x(\xi) \, d\xi$$

$$\theta'(x) = \theta'_h(x) - \frac{1}{G \cdot K} \int_{x_1}^x (1 - \cosh(k \cdot (x - \xi))) \cdot m_x(\xi) \, d\xi$$

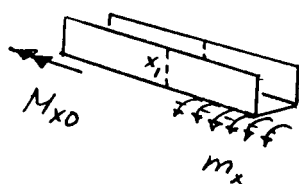
$$\frac{M_\omega(x)}{G \cdot K} = \frac{M_{\omega h}(x)}{G \cdot K} - \frac{1}{G \cdot K} \int_{x_1}^x \left[ \frac{\sinh(k \cdot (x - \xi))}{k} \right] \cdot m_x(\xi) \, d\xi$$

$$\frac{M_x(x)}{G \cdot K} = \frac{M_{x0}(x)}{G \cdot K} - \int_{x_1}^x m_x(\xi) \, d\xi$$

för  $x > x_2$  sättes övre integrationsgränsen till  $x_2$ .

Om det fördelade torsionsmomentet är konstant och sträcker sig från  $x = x_1$  till högerändan,  $x = L$ , erhålls för  $x > x_1$ :

(tors.18)



$$\theta(x) = \theta_h(x) - \left[ \frac{(x - x_1)^2}{2} + \frac{1 - \cosh(k \cdot (x - x_1))}{k^2} \right] \cdot \frac{m_x}{G \cdot K}$$

$$\theta'(x) = \theta'_h(x) - \left[ (x - x_1) - \frac{\sinh(k \cdot (x - x_1))}{k} \right] \cdot \frac{m_x}{G \cdot K}$$

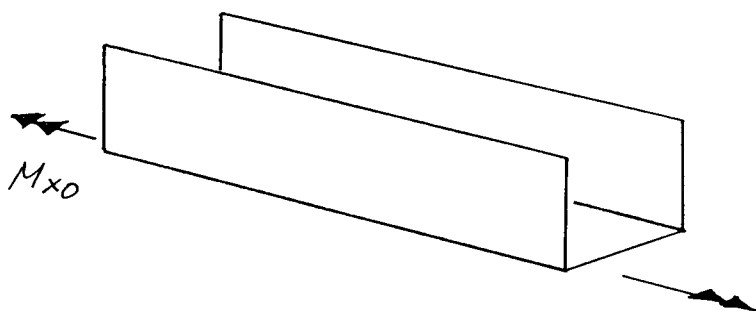
$$\frac{M_\omega(x)}{G \cdot K} = \frac{M_{\omega h}(x)}{G \cdot K} + \left[ \frac{1 - \cosh(k \cdot (x - x_1))}{k^2} \right] \cdot \frac{m_x}{G \cdot K}$$

$$\frac{M_x(x)}{G \cdot K} = \frac{M_{x0}(x)}{G \cdot K} - (x - x_1) \cdot \frac{m_x}{G \cdot K}$$

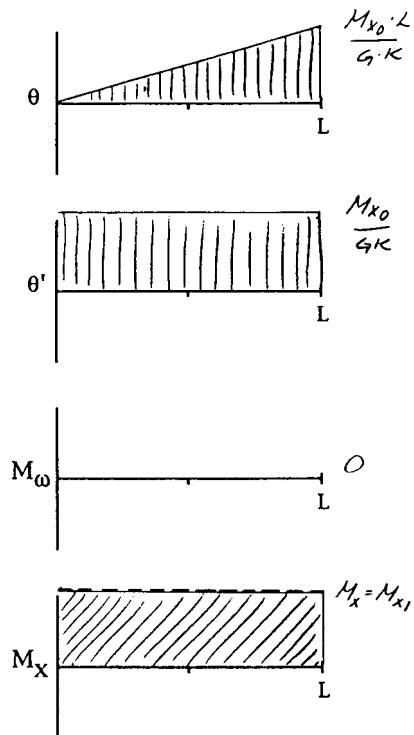
På de följande sidorna ges några exempel på effekten av olika randvillkor och belastningar. De visade kurvorna gäller för  $kL = 3$  vilket ger en tydligt blandad torsion. Om  $kL < 0,5$  blir välvtorsionen helt dominerande (om det finns något välvhinder), medan för  $kL > 15$  dominerar helt St Venantsk torsion.

Exempel på snittstorheter för torsionsbelastad balk ( $kL = 3$ )

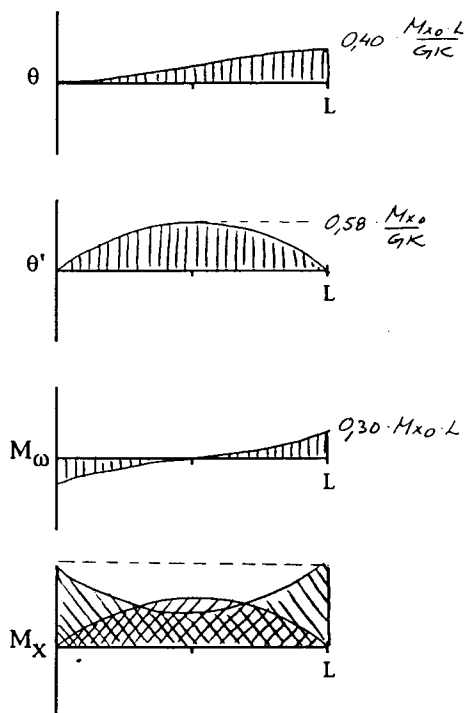
Exempel 1: Konstant torsionsmoment över balkens längd



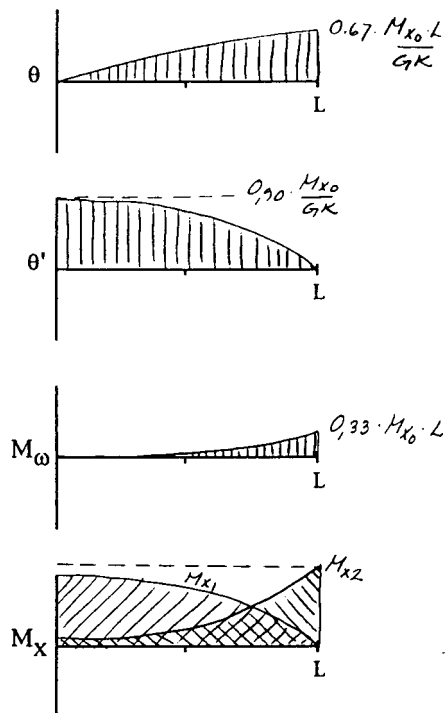
Fri - Fri inspänning:



Välvfast - välvfast inspänning

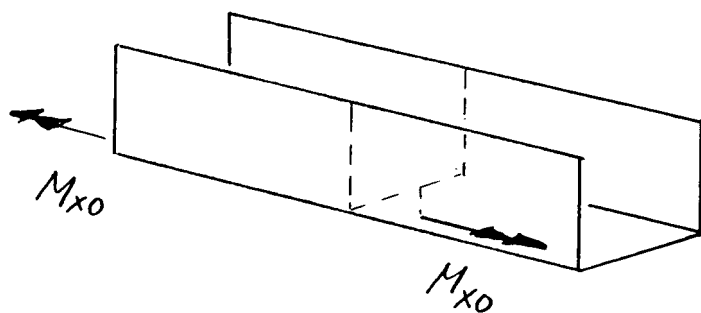


Fri - Välvfast inspänning

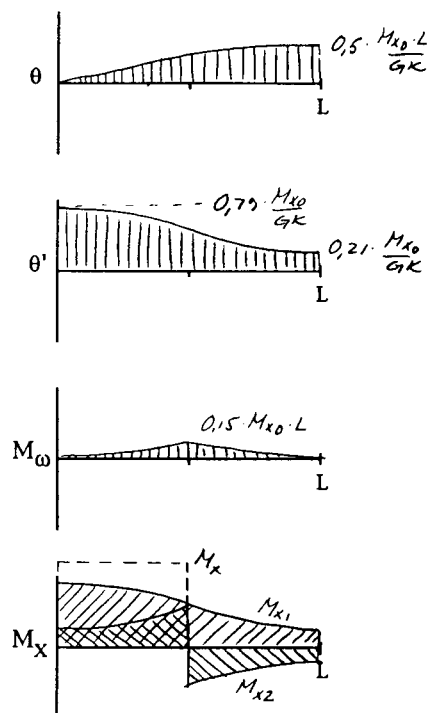


Exempel på snittstorheter för torsionsbelastad balk ( $kL = 3$ )

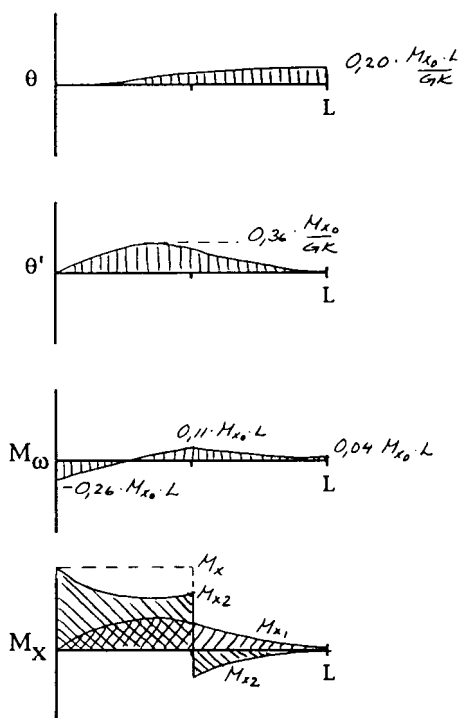
Exempel 2: Punktangripande torsionsmoment vid  $L/2$



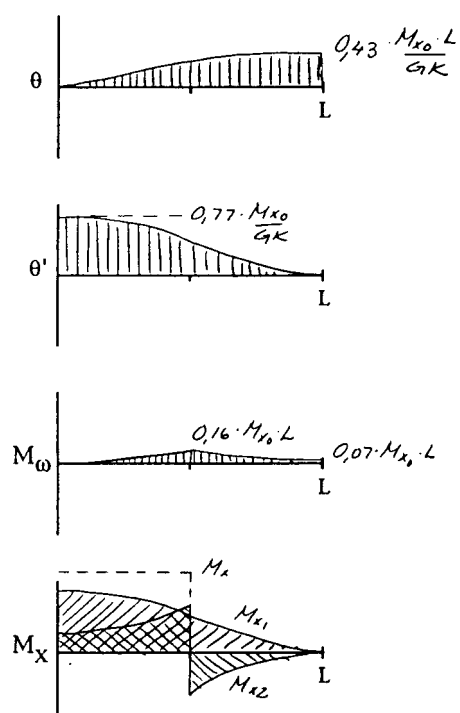
Fri - Fri inspänning:



Välvfast - välvfast inspänning

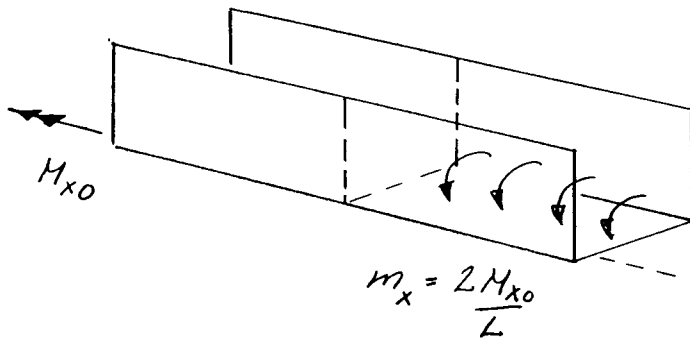


Fri - Välvfast inspänning

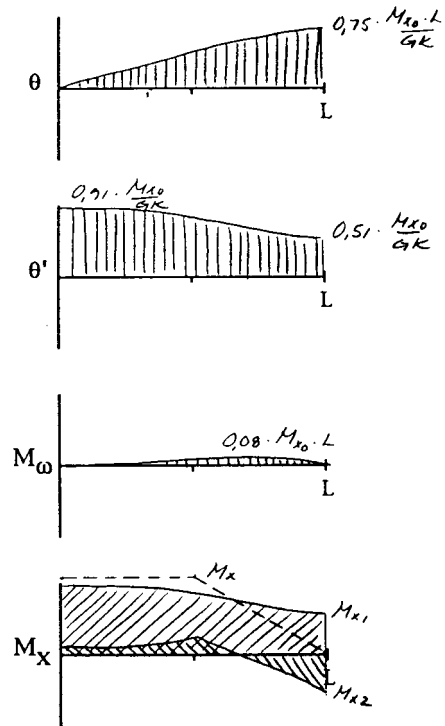


Exempel på snittstorheter för torsionsbelastad balk ( $kL = 3$ )

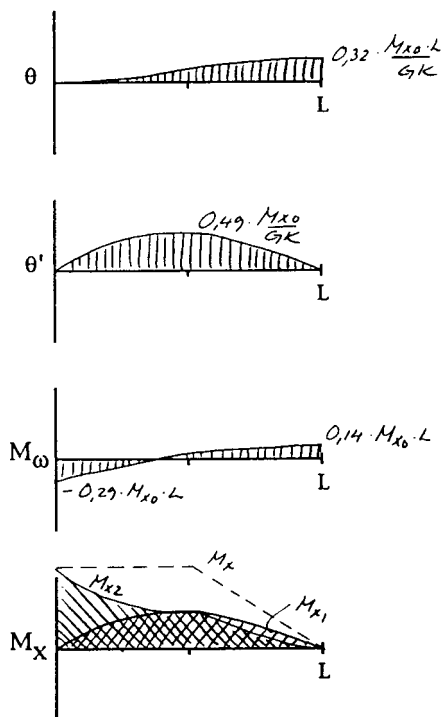
Exempel 3: Konstant fördelat torsionsmoment från  $L/2$  till  $L$



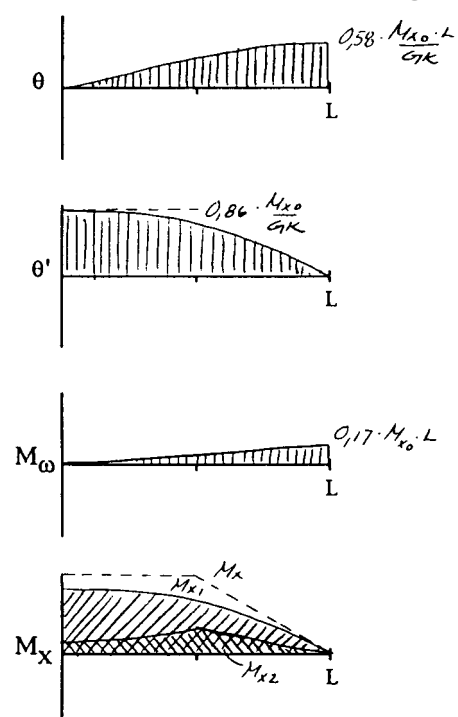
Fri - Fri inspänning:



Välvfast - välvfast inspänning



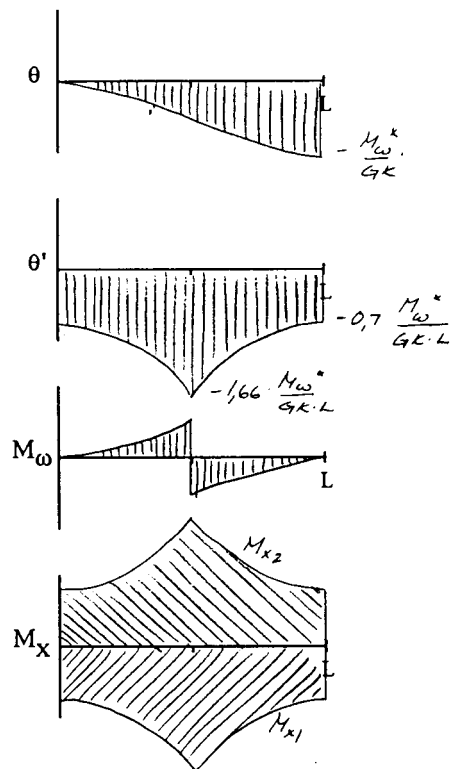
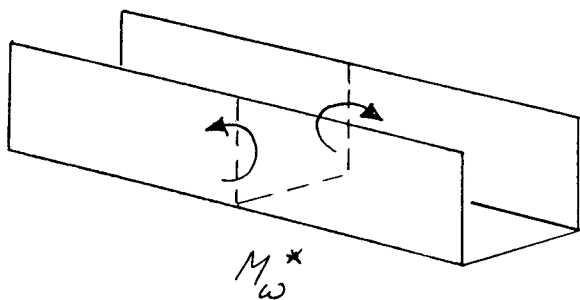
Fri - Välvfast inspänning



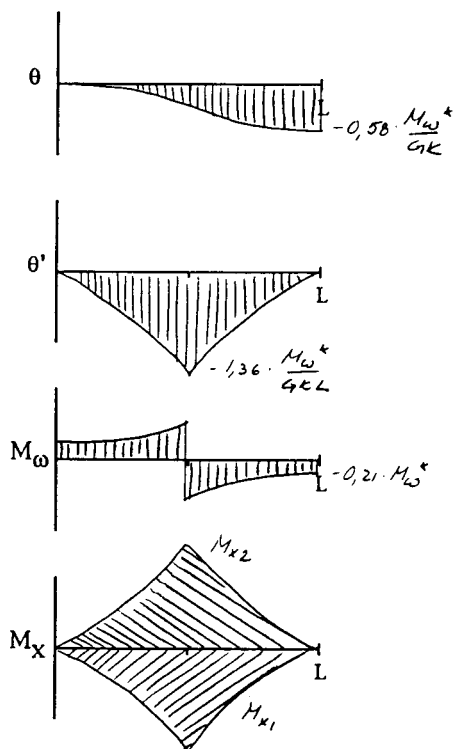
Exempel på snittstorheter för torsionsbelastad balk ( $kL = 3$ )

Exempel 4: Punktangripande bimoment vid  $L/2$

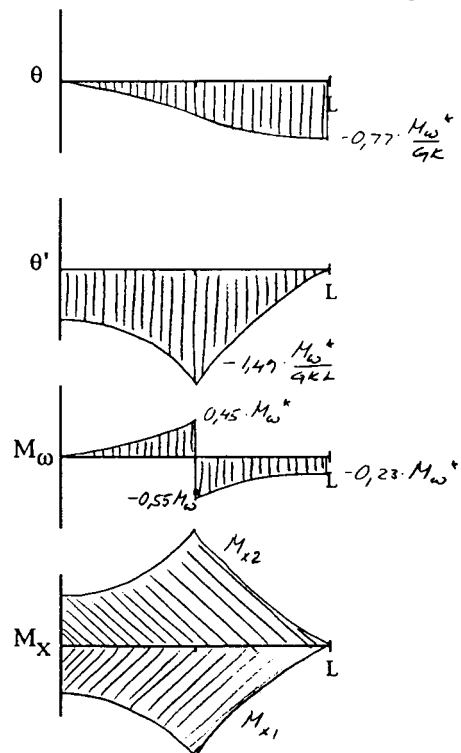
Fri - Fri inspänning:



Välvfast - välvfast inspänning



Fri - Välvfast inspänning





## Analogi med elementär balkböjning

Vridningsvinkelns diffekvation blir som tidigare visats:

$$\theta''''(x) - k^2 \cdot \theta''(x) = \frac{k^2}{G \cdot K} \cdot m(x) \quad \text{där} \quad k = \sqrt{\frac{G \cdot K}{E \cdot I_\omega}}$$

Om  $k$  är mycket liten eller om balkens längd är mycket liten blir den andra termen i vänsterledet (St Venantsk torsion) försumbar i förhållande till den första termen (välvtorsion). Detta leder till en förenklad ekvation som blir helt analog med 'elastiska linjens ekvation' för balkböjning.

**Snittstorheter:**

$$m(x) = E \cdot I_\omega \cdot \theta''''(x)$$

$$M_x(x) = -E \cdot I_\omega \cdot \theta'''(x)$$

$$M_\omega(x) = -E \cdot I_\omega \cdot \theta''(x)$$

$$\theta'(x)$$

$$\theta(x)$$

**BALKBÖJNING:**

$$q(x) = E \cdot I_z \cdot v''''(x)$$

$$T_y(x) = -E \cdot I_z \cdot v'''(x)$$

$$M_z(x) = -E \cdot I_z \cdot v''(x)$$

$$v'(x)$$

$$v(x)$$

**Sektionsstorheter:**

$$I_\omega = \int_0^b \omega_n(s)^2 \cdot t(s) \, ds$$

$$S_\omega(s) = \int_0^s \omega_n(s) \cdot t(s) \, ds$$

$$I_z = \int_0^b y(s)^2 \cdot t(s) \, ds$$

$$S_z(s) = \int_0^s y(s) \cdot t(s) \, ds$$

**Spänningar:**

$$\tau(s, x) = \frac{-M_x(x)}{t(s) \cdot I_\omega} \cdot S_\omega(s)$$

$$\sigma_x(s, x) = \frac{M_\omega(x)}{I_\omega} \cdot \omega_n(s)$$

$$\tau(s, x) = \frac{-T_y(x)}{t(s) \cdot I_z} \cdot S_z(s)$$

$$\sigma_x(s, x) = \frac{M_z(x)}{I_z} \cdot y(s)$$

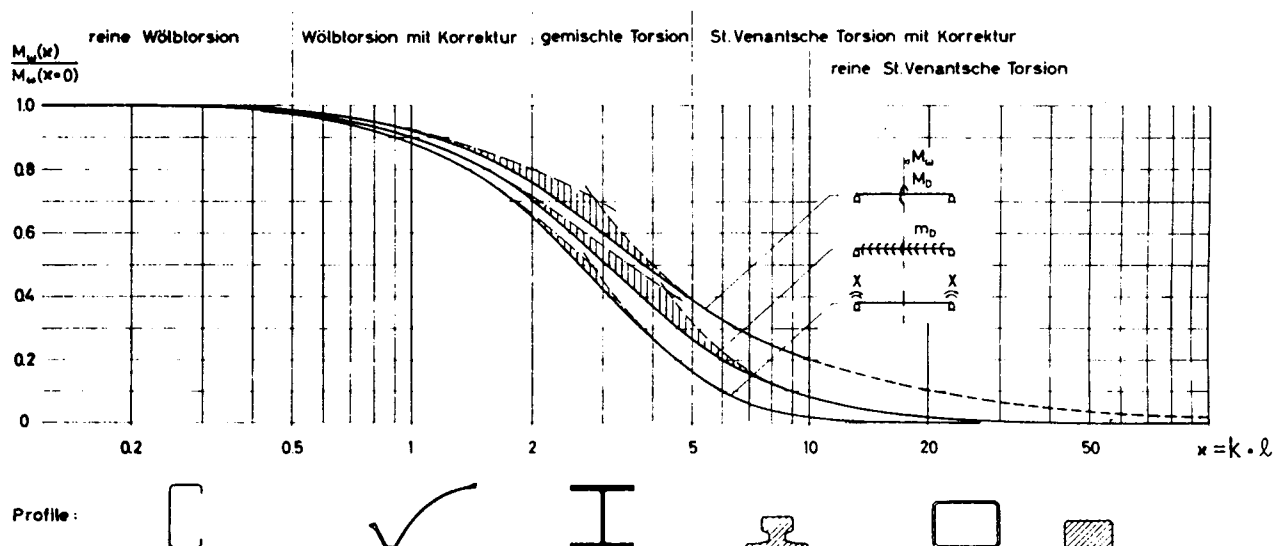
## Analogi med balkböjning (forts)

Analogin med balkböjning förenklar torsionsberäkningarna väsentligt genom att vi kan utnyttja välkända samband och ett stort antal elementarfall.

Förutsättningarna för att analogin mellan vridning och böjning ska vara giltig kan sammanfattas:

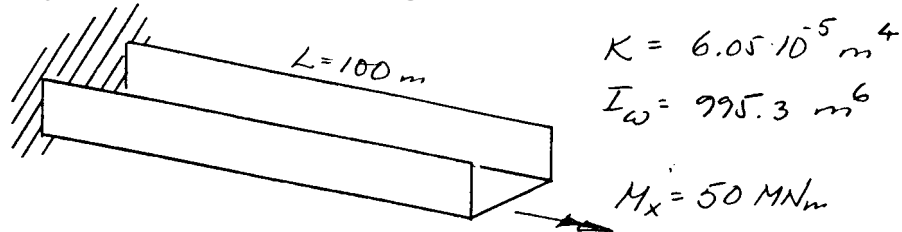
- \*  $k \cdot L$  ska vara litet (säg  $< \approx 0,4$ )
- \* Det analoga balkböjningsfallet måste vara i statisk jämvikt
- \* Belastningsfallet måste inducera bimoment i balken (genom randvillkor eller utbredda laster)

I figuren nedan visas för några olika belastningsfall andelen välv torsion av det totala torsionsmomentet för en välvfritt upplagd balk. Kurvorna är ritade som funktion av  $k L$ . Under figuren visas några tvärsnitt på typiska sektioner svarande mot olika  $k L$  -värden. För massiva, eller helt slutna sektioner är välv torsionen oftast av helt underordnad betydelse, medan den för tunnväggiga öppna sektioner blir dominerande.



## Exempel: Beräkning av snittstorheter för torsionsbelastad öppen balk

Vi ska bestämma snittstorheter och torsionsspänningar för följande enkla belastningsfall



Vi antar sektionsdata enligt beräkningarna i de tidigare beräkningsexemplen. För stål,  $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ ,  $\nu = 0,3$  erhålls:

$$k = \sqrt{\frac{G \cdot K}{E \cdot I_{\omega}}} = \sqrt{\frac{K}{2 \cdot (1 + \nu) \cdot I_{\omega}}} = \sqrt{\frac{6.05 \cdot 10^{-5}}{2.6 \cdot 995.33}} = 1.53 \cdot 10^{-4} \quad k \cdot L = 0.0153$$

Vi börjar med att definiera randvillkor som ska utnyttjas i den allmänna lösningen.

$$\theta_0 = 0 \quad \theta'_0 = 0 \quad M_{\omega 0} = \text{obekant} \quad M_{x0} = M_x \quad M_{\omega}(L) = 0$$

Vi utnyttjar det sista villkoret vid  $x = L$  för att lösa ut det obekanta bimomentet vid  $x = 0$ . (tors.14) ger:

$$\frac{M_{\omega}(L)}{G \cdot K} = \cosh(k \cdot L) \cdot \frac{M_{\omega 0}}{G \cdot K} + \frac{\sinh(k \cdot L)}{k} \cdot \frac{M_{x0}}{G \cdot K} = 0$$

$$M_{\omega 0} = \frac{-\tanh(k \cdot L)}{k} \cdot M_x \quad M_{\omega 0} = -99.99 \cdot M_x$$

Snittstorheterna blir:

$$\theta(x) = (1 - \cosh(k \cdot x)) \cdot \left( \frac{-\tanh(k \cdot L)}{k} \cdot \frac{M_x}{G \cdot K} \right) + \left( x - \frac{\sinh(k \cdot x)}{k} \right) \cdot \frac{M_x}{G \cdot K}$$

$$\theta'(x) = (-k \cdot \sinh(k \cdot x)) \cdot \left( \frac{-\tanh(k \cdot L)}{k} \cdot \frac{M_x}{G \cdot K} \right) + (1 - \cosh(k \cdot x)) \cdot \frac{M_x}{G \cdot K}$$

$$\frac{M_{\omega}(x)}{G \cdot K} = \cosh(k \cdot x) \cdot \left( \frac{-\tanh(k \cdot L)}{k} \cdot \frac{M_x}{G \cdot K} \right) + \frac{\sinh(k \cdot x)}{k} \cdot \frac{M_x}{G \cdot K}$$

(Eftersom  $kx$  är litet för hela balken kan vi sätta  $\sinh(kx) \approx kx$  och  $\tanh(kx) \approx kx$  där dessa förekommer som fria faktorer i uttrycken. Jämför siffervärdena för  $M_{\omega 0}$  ovan!)

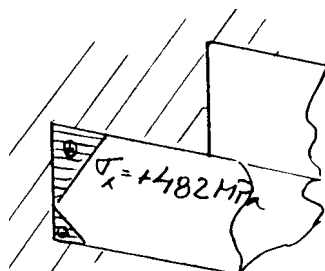
Exempel: beräkning av snittstorheter, (forts)

Med siffervärden (SI-enheter) insatta får vi:

$$x := 0, 10.. 100 \quad G := 8.077 \cdot 10^{10} \quad K := 6.05 \cdot 10^{-5}$$

$$k := 1.53 \cdot 10^{-4} \quad L := 100 \quad M_x := 50 \cdot 10^6$$

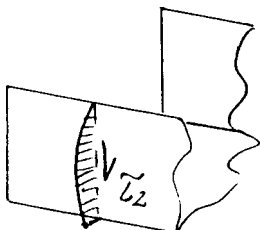
x	$\theta(x)$	$\theta'(x)$	$M_\omega(x)$	$M_{x2}(x)$
0	0	0	$-4.9996 \cdot 10^9$	$5 \cdot 10^7$
10	0.0012	0.0002	$-4.4996 \cdot 10^9$	$4.9999 \cdot 10^7$
20	0.0045	0.0004	$-3.9996 \cdot 10^9$	$4.9998 \cdot 10^7$
30	0.0097	0.0006	$-3.4997 \cdot 10^9$	$4.9997 \cdot 10^7$
40	0.0166	0.0008	$-2.9997 \cdot 10^9$	$4.9996 \cdot 10^7$
50	0.0249	0.0009	$-2.4997 \cdot 10^9$	$4.9996 \cdot 10^7$
60	0.0345	0.001	$-1.9998 \cdot 10^9$	$4.9995 \cdot 10^7$
70	0.045	0.0011	$-1.4998 \cdot 10^9$	$4.9995 \cdot 10^7$
80	0.0562	0.0011	$-9.9988 \cdot 10^8$	$4.9994 \cdot 10^7$
90	0.0679	0.0012	$-4.9994 \cdot 10^8$	$4.9994 \cdot 10^7$
100	0.0798	0.0012	0	$4.9994 \cdot 10^7$



Välvspänningarna blir störst vid  $x = 0$ :

$$\sigma_{x\max} = \text{Max} \left( \frac{M_\omega(x)}{I_\omega} \cdot \omega_n(s) \right) = \frac{-5 \cdot 10^9}{995} \cdot 96 = 482 \text{ MPa } (\pm)$$

(Dragspänning överst om SB, tryck om BB)



Välvskevspänningarna blir praktiskt taget konstanta utefter hela balkens längd, de största värdena inträffar 4m över BL med samma tecken på BB och SB sida:

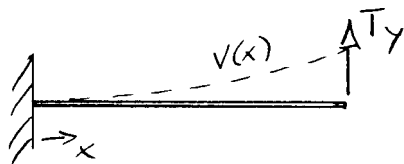
$$\tau_{2\max} = \text{Max} \left( \frac{-M_{x2}(x)}{t(s) \cdot I_\omega} \cdot S_\omega(s) \right) = \frac{-5 \cdot 10^7}{0.012 \cdot 995} \cdot (-4.61) = 19 \text{ MPa}$$

Vi ser av resultatet ovan att välvtorsionen helt dominerar pga den tunnväggiga öppna sektionen i vårt exempel. Problemet kan därför lätt lösas med balkböjningsanalogi.

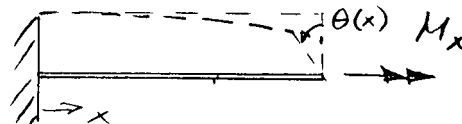
Exempel: beräkning av snittstorheter, (forts)

Balkböjningsanalogin för vårt belastningsfall blir:

**Balkböjning:**



**Välvtorsion:**



För balkböjningsfallet känner vi direkt fördelningen av böjmomentet, svarande mot bimomentet i torsionsfallet:

$$M_z(x) = T_y \cdot (x - L) \qquad M_\omega(x) = M_x \cdot (x - L)$$

ur bimomentet kan vi integrera fram fördelningarna för  $\theta'$  och  $\theta$  (alternativt kan dessa hämtas ur analoga elementarfall för balkböjning)

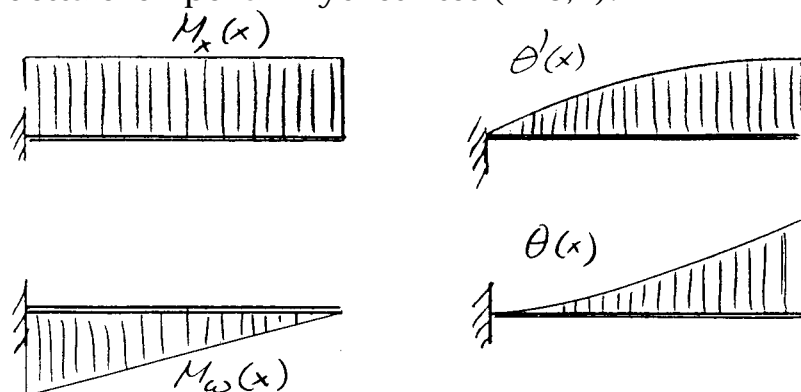
$$\theta''(x) = \frac{-M_\omega(x)}{E \cdot I_\omega} = -\frac{M_x}{E \cdot I_\omega} \cdot (x - L)$$

$$\theta'(x) = -\frac{M_x}{E \cdot I_\omega} \cdot \left( \frac{x^2}{2} - L \cdot x + C_1 \right)$$

$$\theta(x) = -\frac{M_x}{E \cdot I_\omega} \cdot \left( \frac{x^3}{6} - L \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 \cdot x + C_2 \right)$$

Randvillkoren  $\theta'(0) = 0$  ger  $C_1 = 0$       $\theta(0) = 0$  ger  $C_2 = 0$

Resultatet blir intill tredje siffran detsamma som när vi använde den fullständiga differentialekvationen eftersom  $kL$  i detta exempel är mycket litet ( $\ll 0,4$ ).

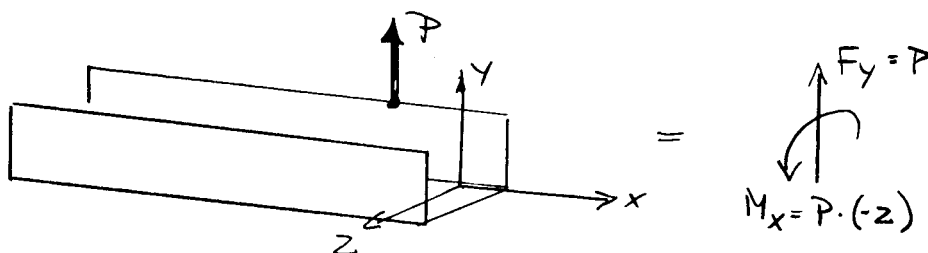


## Yttre krafter

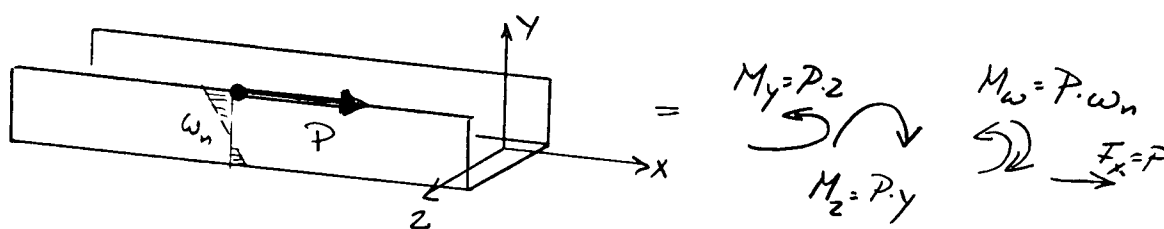
En godtycklig yttre last kan delas upp i lastkomponenter motsvarande balkens snittstorheter:

- \* Axiell kraft (normalkraft),  $F_x$
- \* Tvärkrafter,  $F_y$ ,  $F_z$
- \* Böjmoment,  $M_y$ ,  $M_z$
- \* Torsionsmoment,  $M_x$
- \* Bimoment,  $M_\omega$

En vertikal punktkraft  $P$  på avståndet  $z$  från skjuvcentrum kan på detta sätt delas upp i en yttre tvärkraft  $F_y = P$  och ett yttre torsionsmoment  $M_x = -Pz$



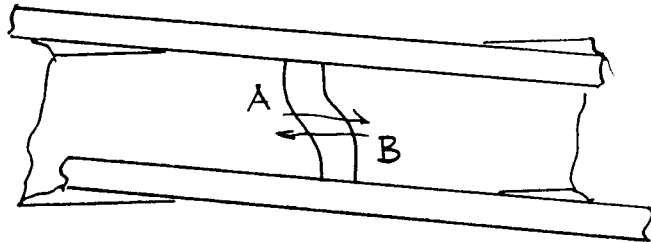
På samma sätt kan en längsriktad punktkraft  $P$  i en godtycklig punkt utefter tvärsektionen delas upp i en yttre axiell kraft  $F_x$ , böjande moment  $M_y = Pz$ ,  $M_z = Py$  samt ett bimoment  $M_\omega = P\omega_n(y,z)$ .



I alla fall - utom om den verkar genom skjuvcentrum eller i ett symmetriplan (CL för fartygssektioner) - kommer en axiell kraft således att ge upphov till ett bimoment och därmed i praktiken också ett sekundärt torsionsmoment trots att ingen yttre torsionsbelastning pålagts!

## Tvårskeppstrimlor i öppna sektioner

En smal tvårskeppstrimla mellan sidorna i en i övrigt öppen sektion deformeras i böjning på grund av välvningen. Tvärstrimlans böjstyvhet kommer att medföra ett välvhinder. Detta kan man modellera genom att vid tvärstrimlans position införa ett bimoment var storlek bestäms av välvningen och böjstyvheten.

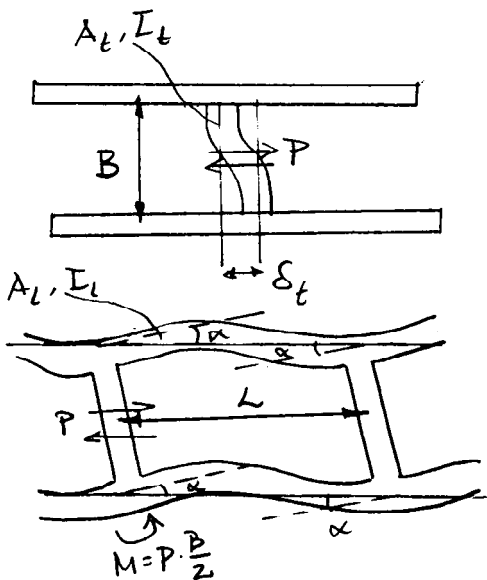


Beräkningsgången blir som följer:

1 Bestäm välvningens storlek i CL vid tvärstrimlans position som funktion av yttre last, utan hänsyn till tvärstrimlan.

$$\delta_Q(x_i) = -\theta' Q(x_i) \cdot (\omega_n(s_B) - \omega_n(s_A)) = \theta' Q(x_i) \cdot 2 \cdot A$$

där A är den totala arean som sektionen omsluter.



2 Bestäm sambandet mellan välvning och återförande tvärkraft vid tvärstrimlan.

Deformationen i tvärstrimlan kan delas upp i två komponenter, den ena beroende av tvärstrimlans egen deformation, den andra beroende på infästningens deformation. För tvärstrimlans 'egen' deformation har vi (ur styvhetsmatrisen med hänsyn till skjivning) se t ex SSD (5.5.16):

$$\delta_t = \frac{P \cdot B^3 \cdot (1 + \Phi_t)}{12 \cdot E I_t} \quad \Phi_t = \frac{12 \cdot E I_t}{G \cdot A_t \cdot B^2}$$

och för infästningen:

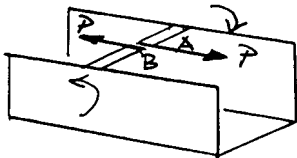
$$\delta_l = B \cdot \alpha = B \cdot \frac{M \cdot L \cdot (1 + \Phi_l)}{6 \cdot E I_l} = \frac{P \cdot B^2 \cdot L \cdot (1 + \Phi_l)}{2 \cdot 6 \cdot E I_l} \quad \Phi_l = \frac{12 \cdot E I_l}{G \cdot A_l \cdot L^2}$$

$\delta_{tot}(P) = \delta_t + \delta_l$  ger det fullständiga sambandet mellan snittkrafter och förskjutning (välvning) av sidorna.

Tvårskeppstrimlor: (forts)

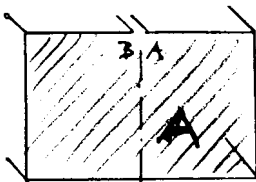
3 Bestäm välvningens storlek i CL som funktion av det återförande bimoment som uppstår vid tvärstrimlan:

Återförande bimomentet och välvning i CL-snittet som funktion av tvärkraften i tvärstrimlan blir:



$$M_{\omega P}(x_i) = P_i \cdot (\omega_n(s_A) - \omega_n(s_B)) = P_i \cdot 2 \cdot A$$

$$\delta_P(x_i) = -\theta' P(x_i) \cdot (\omega_n(s_B) - \omega_n(s_A)) = \theta' P(x_i) \cdot 2 \cdot A$$



4 Det geometriska villkoret

$$\delta_{tot}(x_i) = \delta_Q(x_i) + \delta_P(x_i) = \delta_{tot}(P)$$

$$\omega_{nA} = \int_0^A h \cdot ds = A$$

$$\omega_{nB} = -\int_0^B h \cdot ds = -A$$

ger slutligen möjlighet att lösa ut P och därmed snittstorheterna för hela den torsionsbelastade balken med hänsyn till tvärstrimlans uppstyvande verkan.

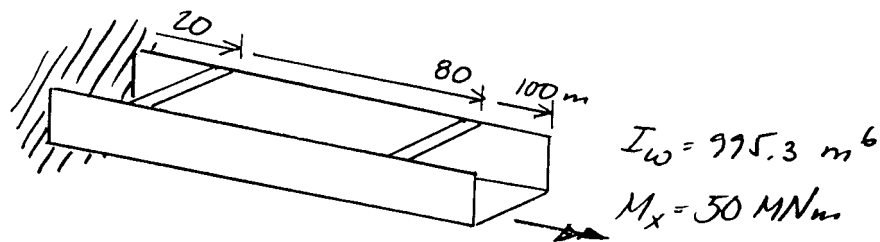
Om man har flera tvärstrimlor med återförande krafter  $P_i$  kommer  $\delta_P(x_i)$  i en given koordinat att få bidrag från alla tvärstrimlorna.  $\delta_{tot}(x_i)$  får ställas upp för varje tvärstrimla och vi får ett ekvationssystem med lika många ekvationer som obekanta återförande krafter  $P_i$ .

I det följande exemplet visas beräkningsgången i praktiken för två tvärstrimlor.



## Exempel: Beräkning av uppstyvande inverkan från två tvärskeppstrimlor

Vi fortsätter med samma sektion och belastningsfall som vi räknat på tidigare men lägger till två 4m breda och 18mm tjocka 'tvärskepps'-strimlor vid koordinaterna  $x = 20\text{m}$  resp  $80\text{m}$ .



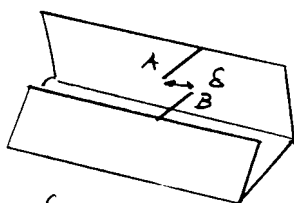
### Lösning:

Vi har tidigare fastställt att den förenklade diff.ekvationen med hänsyn enbart till välv torsion (balkböjningsanalogin) är fullt tillräcklig för detta fall, och utnyttjar detta i beräkningarna.

### 1: $\delta_{1Q}$ och $\delta_{2Q}$ välvning som funktion av yttre last (utan tvärstrimlor)

1 Vi beräknar först parallellförskjutningen av däckstrimlornas ändpunkter pga yttre last under antagandet att de är snittade i CL.

$$\delta_Q(x_i) = -\theta'_Q(x_i) \cdot (\omega_n(s_B) - \omega_n(s_A)) = \theta'_Q(x_i) \cdot 2 \cdot A$$



$$\delta = u(B) - u(A)$$

$$= -\theta'_Q(\omega_{nB} - \omega_{nA})$$

$$= \theta'_Q(\omega_{nA} - \omega_{nB})$$

enligt tidigare beräkningar har vi:

$$\theta'_Q(x) = -\frac{M_x}{E \cdot I_{\omega}} \cdot \left( \frac{x^2}{2} - L \cdot x \right) \quad \text{vilket ger}$$

$$\theta'_Q(20) = 0.000431 \quad \theta'_Q(80) = 0.001148$$

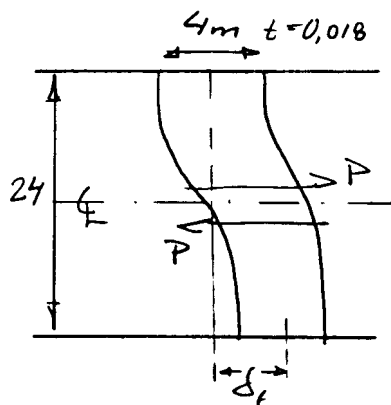
$$\delta_{1Q} = 0.000431 \cdot 2 \cdot 12 \cdot 24 = 0.2483$$

$$\delta_{2Q} = 0.001148 \cdot 2 \cdot 12 \cdot 24 = 0.6612$$

Exempel: Tvärskeppstrimlor (forts)

2:  $\delta(P)$  samband mellan förskjutningar och snittkrafter i tvärstrimlorna

Vi antar i detta exempel att tvärstrimlorna sitter fast inspända i sidobordläggningen (eg orimligt antagande som balken är ritad!)



$$\delta_t = \frac{P \cdot B^3 \cdot (1 + \Phi_t)}{12 \cdot E \cdot I_t} \quad \Phi_t = \frac{12 \cdot E \cdot I_t}{G \cdot A_t \cdot B^2}$$

$$B = 24 \text{ m} \quad I_t = \frac{0.018 \cdot 4^3}{12} \text{ m}^4 \quad E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ MPa}$$

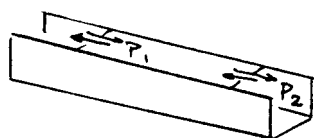
$$A_t = 0.8 \cdot 4 \cdot 0.018 \text{ m}^2 \quad \text{ger} \quad \Phi_t = 0.08$$

$$\delta_t = 6.2 \cdot 10^{-8} \cdot P$$

vilket gäller för båda tvärstrimlorna

3:  $\delta_{1P}$  och  $\delta_{2P}$  välvning som funktion av tvärstrimlornas snittkrafter

De återförande krafterna  $P_1$  och  $P_2$  ger upphov till bimoment som kommer att motverka välvningen från den yttre lasten.



$$M_{\omega P}^x = P \cdot (\omega_n(s_A) - \omega_n(s_B)) = P \cdot 2 \cdot A$$

för varje tvärstrimla. Eftersom vi endast har välvtorsion (balkböjningsanalogin!) kan vi lätt lösa ut fördelningen av bimomentet och  $\theta'$  över balken:

$$0 < x < 20$$

$$M_{\omega P}(x) = 2 \cdot (P_1 + P_2) \cdot A$$

$$\theta'_P(x) = \int_0^x \frac{-M_{\omega P}(x)}{E \cdot I_{\omega}} dx = \frac{-2 \cdot (P_1 + P_2) \cdot A}{E \cdot I_{\omega}} \cdot x - 0$$

$$20 < x < 80$$

$$M_{\omega P}(x) = 2 \cdot P_2 \cdot A$$

$$\theta'_P(x) = \int_{20}^x \frac{-M_{\omega P}(x)}{E \cdot I_{\omega}} dx = \frac{-2 \cdot P_2 \cdot A}{E \cdot I_{\omega}} \cdot (x - 20) + \frac{-2 \cdot (P_1 + P_2) \cdot A}{E \cdot I_{\omega}} \cdot 20$$

$$80 < x < 100$$

$$M_{\omega P}(x) = 0 \quad \theta'_P(x) = \frac{A}{E \cdot I_{\omega}} \cdot (-160 \cdot P_2 - 40 \cdot P_1)$$

Exempel: Tvärskeppstrimlor (forts)

Välvningen vid tvärstrimlorna som funktion av bimomenten blir:

$$\delta_{1P} = \theta'_P(20) \cdot 2 \cdot A = \frac{-80 \cdot A^2}{E \cdot I_\omega} \cdot (P_1 + P_2) = -3.18 \cdot 10^{-8} \cdot (P_1 + P_2)$$

$$\delta_{2P} = \theta'_P(80) \cdot 2 \cdot A = -3.18 \cdot 10^{-8} \cdot (P_1 + 4 \cdot P_2)$$

4:  $\delta(P) = \delta_P + \delta_Q$  ger krafterna P i tvärskeppstrimlorna

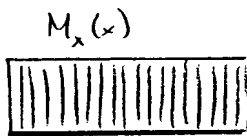
Vårt ekvationssystem blir nu:

$$6.2 \cdot 10^{-8} \cdot P_1 = -3.18 \cdot 10^{-8} \cdot (P_1 + P_2) + 0.2483$$

$$6.2 \cdot 10^{-8} \cdot P_2 = -3.18 \cdot 10^{-8} \cdot (P_1 + 4 \cdot P_2) + 0.6612$$

med lösningen

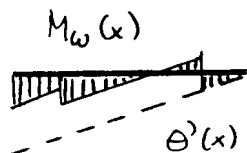
$$P_1 = 1.55 \cdot 10^6 \quad P_2 = 3.23 \cdot 10^6$$



Insatt i de tidigare uttrycken får vi nu

$$\delta_1 = 6.2 \cdot 10^{-8} \cdot P_1 = 0.0961 \quad \delta_2 = 6.2 \cdot 10^{-8} \cdot P_2 = 0.2003$$

dvs en minskning med 61% resp 70% !

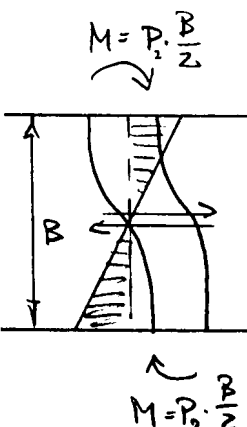
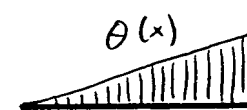


Bimomentets fördelning erhålls som summan av bimomentet från yttre last och från tvärskeppstrimlorna.

$$0 < x < 20 \quad M_\omega(x) = M_{\omega 1} + M_{\omega 2} + M_x \cdot (x - L)$$

$$20 < x < 80 \quad M_\omega(x) = M_{\omega 2} + M_x \cdot (x - L)$$

$$80 < x < 100 \quad M_\omega(x) = M_x \cdot (x - L)$$



Välvspänningarna vid inspänningen har minskat till mindre än hälften. Kontrollerar vi böjspänningarna i främre tvärstrimlan upptäcker vi dock att vi gått "ur askan i elden"!

$$\sigma_{b2} = \frac{P_2 \cdot B}{2 \cdot W} \quad W = \frac{I}{y} = \frac{0.096}{2} \quad \text{ger} \quad \sigma_{b2} = \frac{3.23 \cdot 10^6 \cdot 24}{0.096} = 807 \cdot 10^6$$

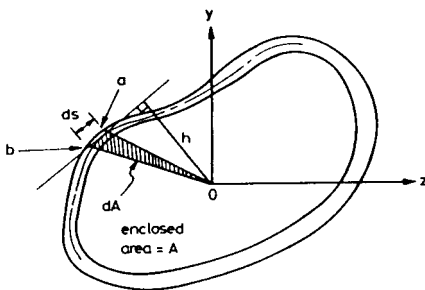
Tvärstrimlan måste ges en bättre utformning än en plan plåt.

## Sluten sektion - Torsion utan välvningshinder

Sambandet mellan torsionsmoment och vridning beskrivs liksom för en öppen sektion av

$$M_x = G \cdot K \cdot \theta'(x)$$

där dock K blir mycket större än för den öppna sektionen. Medelvärde av de fria skjuvspänningarna  $\tau_s$  (ofta kallad Bredt's skjuvspänning  $\tau_b$ ) är inte längre lika med noll. För en tunnväggig sektion är skjuvspänningarna praktiskt taget konstanta över tjockleken. En jämviktsbetraktelse ger också att skjuvflödet  $q$  runt sektionen är konstant.

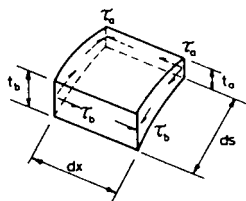


(a) GEOMETRY

Torsionsmomentet blir:

$$M_x = \oint_0^b \tau_s \cdot t \cdot h \, ds = q_s \cdot \oint_0^b h \, ds = q_s \cdot 2 \cdot A$$

där integrationen sker runt hela sektionen.



(b) EQUILIBRIUM OF STRESSES

Ur energijämvikt kan härledas att vridstyvhetens tvärsnittsfaktor för den slutna sektionen blir:

$$K = \frac{4 \cdot A^2}{\oint_0^b \frac{1}{t} \, ds}$$

(vilket är i storleksordningen  $r^2/t^2$  gånger större än för motsvarande öppna sektion!)

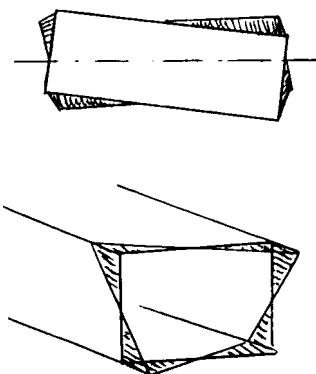
Skjuvdeformationerna längs sektionen motverkar den fria välvningen (stelkroppsförskjutningen) så att

$$u(s, x) = - \int_0^s h(s) \, ds \cdot \theta'(x) + \int_0^s \frac{\tau_s}{G} \, ds$$

$$u(s, x) = -\omega_n(s) \cdot \theta'(x)$$

där den normerade sektoriella koordinaten är modifierad med hänsyn till skjuvdeformationerna:

$$\omega_n(s) = \int_0^s h(s) \, ds - \frac{q_s}{G \cdot \theta'} \cdot \int_0^s \frac{1}{t} \, ds$$



## Sluten sektion - Torsion med välvningshinder

Helt analogt med fallet för en öppen sektion kommer en förhindrad eller varierad välvning att ge upphov till välvnormal- och välvskjuvspänningar och därmed ett sekundärt torsionsmoment. Välvnormalspänningarna kommer att variera utefter sektionen som den modifierade normerade sektoriella koordinaten.

För helt slutna, nära kvadratiska, tunnväggiga sektioner blir välvdeformationerna och därmed välvtorsionen av underordnad betydelse. För i huvudsak öppna sektioner med inslag av slutna celler, (typiska fartygskrov), kan dock fortfarande välvtorsionen vara dominerande eller iallafall betydelsefull.

## Flercelliga öppna sektioner

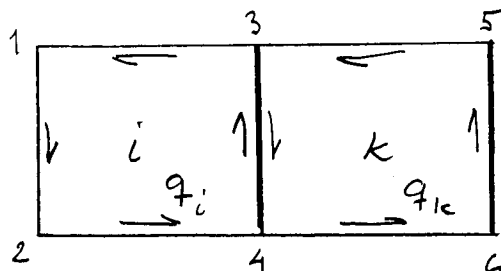
För beräkning av den modifierade sektoriella koordinaten för en flercellig sektion måste man bestämma det korrigerande skjuvflödet  $q_i$  i varje cell (endast  $q_s$  beaktas).

Eftersom välvningen integrerad runt varje cell ska vara lika med noll erhålls:

$$\oint_i h(s) ds - \frac{q_s}{G \cdot \theta'} \cdot \oint_i \frac{1}{t} ds = 0 \quad \text{ger} \quad \frac{1}{\theta'} \cdot \oint_i \frac{q_i}{t} ds = G \cdot 2 \cdot A_i$$

Skjuvflödet i cellerna är konstant i alla väggar utom de som är gemensamma med intilliggande celler, där skjuvflödet utgör summan av de båda bidragen. Genom att ställa upp integrationssamband för varje cell erhålls ett ekvationssystem ur vilket de enskilda skjuvflödena  $q_i$ ,  $q_k$ , etc kan bestämmas.

För det 2-celliga exemplet här bredvid erhålls:



$$\frac{1}{\theta'} \cdot \oint_i \frac{q_i}{t} ds - \frac{1}{\theta'} \cdot \int_3^4 \frac{q_k}{t} ds = G \cdot 2 \cdot A_i$$

$$\frac{1}{\theta'} \cdot \oint_k \frac{q_k}{t} ds - \frac{1}{\theta'} \cdot \int_3^4 \frac{q_i}{t} ds = G \cdot 2 \cdot A_k$$

Flercelliga öppna sektioner (forts)

Förhållandet mellan det fria skjuvflödet och  $\theta'$  är en konstant oberoende av torsionsmomentets storlek. Detta brukar betecknas normaliserat skjuvflöde (*normalized shear flow*):

$$\bar{q}_i = \frac{q_i}{\theta'}$$

När detta är känt i alla celler kan sektionsfördelningar, sektionsstorheter, snittstorheter etc enligt (tors.2-13) beräknas utgående från modifierad normerad sektoriell koordinat

$$\omega_n(s) = \int_0^s h(s) ds - \frac{1}{G} \int_0^s \frac{\bar{q}_i}{t} ds$$

(tors.19)

Vidstyvhets tvärsnittsfaktor för en flercellig sektion blir:

$$K = \sum_i 2 \cdot A_i \cdot \bar{q}_i + \frac{1}{3} \int_0^b t^3 ds$$

(tors.20)

där den första termen gäller slutna celler och den andra gäller öppna sektionsdelar.

Exempel på sektoriella koordinatens fördelning för ett vanligt tvärsnitt av ett containerfartyg visas nedan.

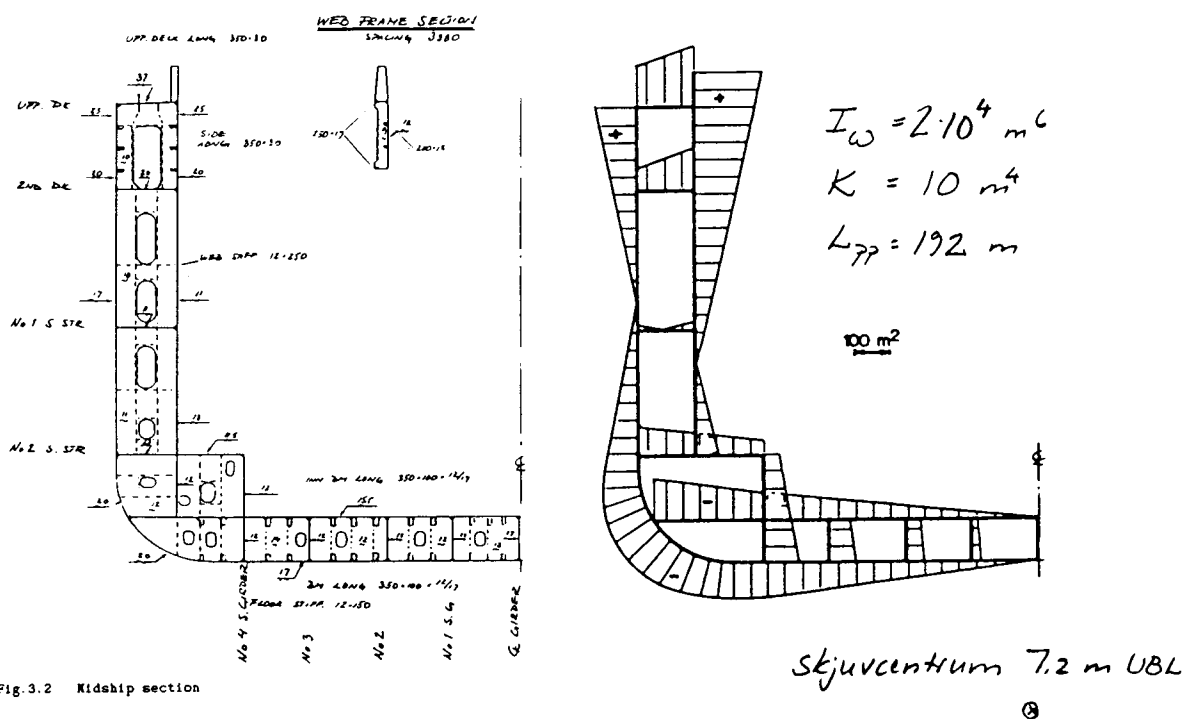


Fig.3.2 Midship section

## Idealisering av verkliga öppna fartygsskrov

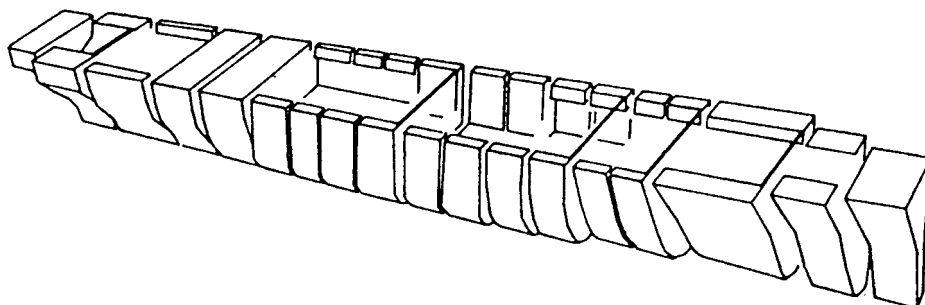
Den förenklade och delvis approximativa grundläggande torsionsteori som beskrivits, kan inte direkt appliceras på verkliga fartygsskrov, åtminstone inte med kvantitativt tillförlitliga resultat. De viktigaste skälen till detta är:

- \* Verkliga fartygsskrov har inte konstanta prismatiska tvärsnitt
- \* Inspänningsförhållandena runt den öppna skrovsektionen kan inte på något enkelt sätt beskrivas i form av  $\theta'_0$  eller  $M_{\omega 0}$ .

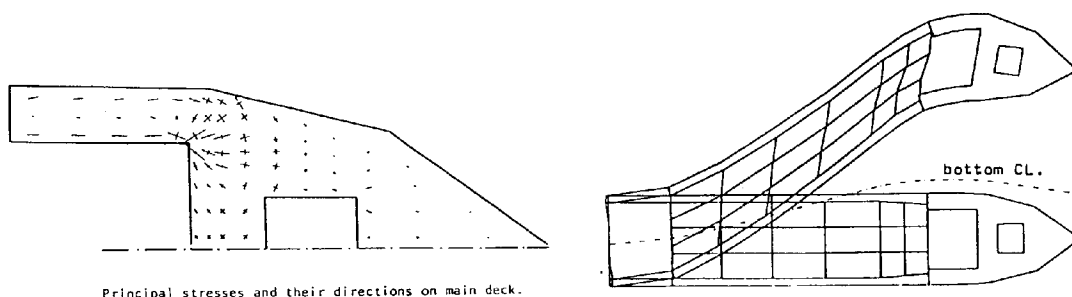
## Varierande sektionsdata

Tvärsnittet i ett fartyg varierar dels beroende på skrovformens kontinuerliga variation och dels sprängvis vid införande av tvärdäck, slutna celler etc i strukturen. Den kontinuerliga variationen bör man i princip kunna ta hänsyn till i den beskrivna teorin, eller man kan med rimlig noggrannhet lösa problemet genom numeriska delbalksmetoder. Ett enkelt torsionsbalkselement med välvning finns beskrivet i SSD 6.2.

'Delbalksmodell'  
av ett icke-  
prismatiskt  
fartygsskrov



Vid sprängvisa förändringar av tvärsnittet kan man inte erhålla geometrisk kompatibilitet av välvningens fördelning över anslutande tvärsnittet utan att införa lokal böjning kombinerat med en form av stelkroppsförskjutning av de olika sektionerna. I praktiken är detta just vad som sker i anslutningen mellan det öppna lastrummet och slutna maskinrum resp förskepp i containerfartyg.



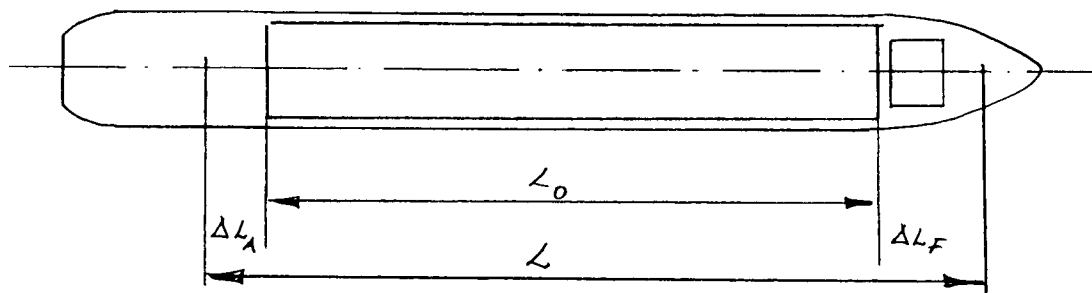
Principal stresses and their directions on main deck.

## Inspänningsförhållandet runt den öppna lastlådan

I anslutningen mellan öppen och sluten fartygssektion är inte välvningen helt förhindrad framför allt beroende på den nyss beskrivna lokala böjningen och 'stelkroppsförskjutningen'.

För överslagsberäkningar kan man efterlikna det verkliga förhållandet genom att anta att den öppna sektionen sträcker sig en bit in i den slutna innan fullständigt välvhinder uppstår (dvs beräkningslängden ökas på samma sätt som man kan simulera brickinfästningar vid balkböjning).

Tillägglängderna ansätts beroende på hur välvfast man bedömer infästningen. Ett riktvärde är att låta tillägglängderna vara i storleksordningen malldjupet  $D$ , men detta blir naturligtvis starkt beroende av hur den slutna sektionen är utformad.



## FEM-beräkningar enda möjligheten för noggranna kvantitativa analyser

Med hänsyn till idealiseringsproblemen ovan kan man dra slutsatsen att det enda rimliga sättet att räkna på torsion-inducerade spänningar och deformationer är att göra en relativt fin FE-modell av hela, eller större delen av fartyget. Modellen bör utformas så att vrid- och välvstyvheten blir riktigt representerad och så att nominella böjspänningar i däckstrimlorna kan beräknas.

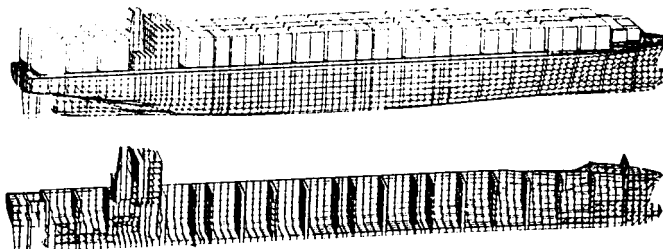
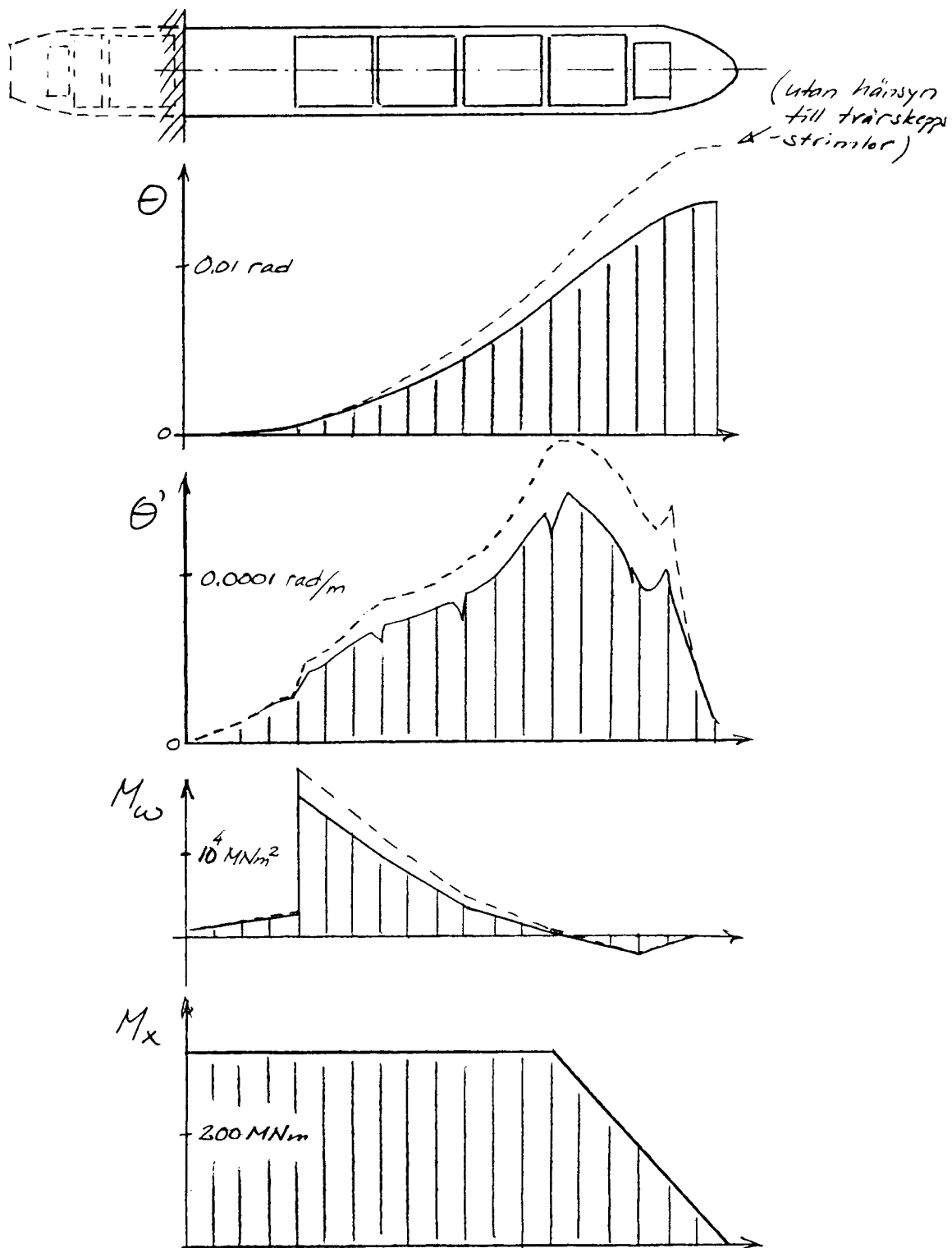


Fig. 1—Finite element model of the PANAMAX-container ship "Hannover Express"



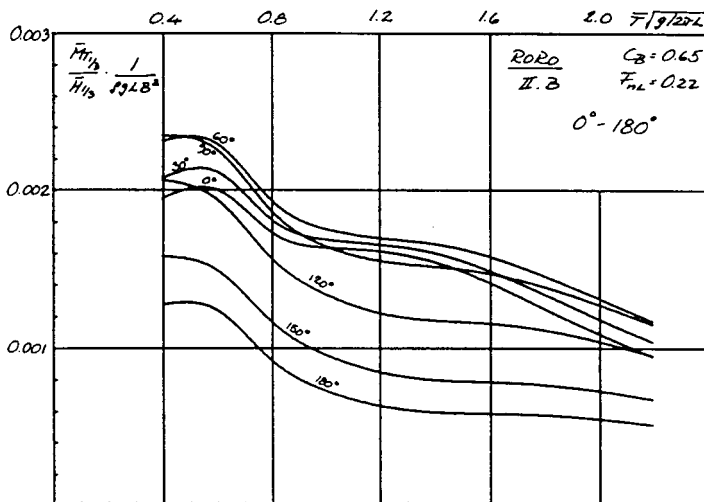
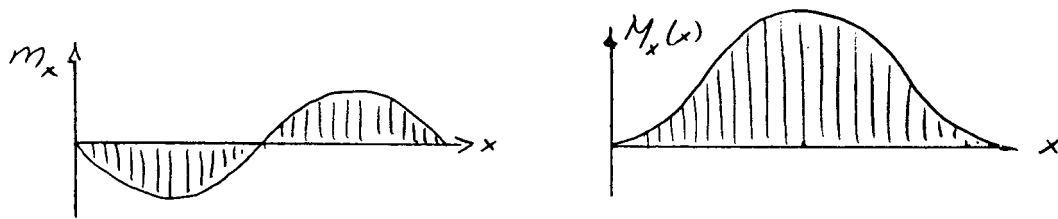
## Exempel på snittstorheter beräknade med FEM (M/S Nihon)

FE-modellen är belastad med ett trapetsformat torsionsmoment (jämt fördelat utbrett torsionsmoment på de förliga 20% av fartygslängden). Som randvillkor har fast inspänning ansatts akter om maskinrummet.



## Torsionsbelastningen

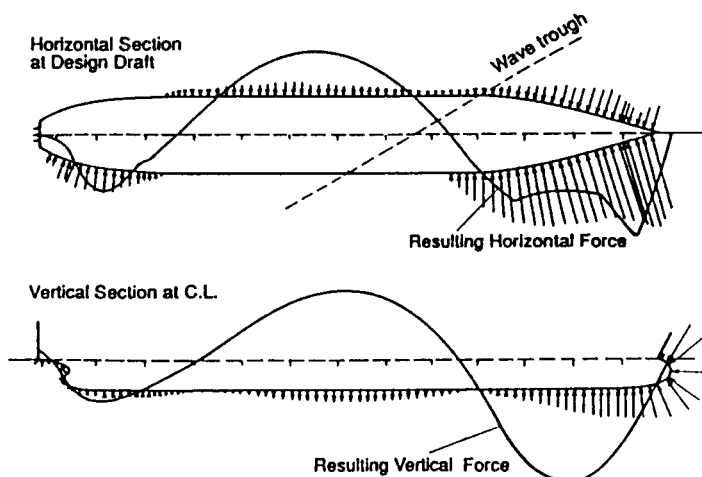
Ett våginducerat torsionsmoment uppstår då fartyg går snett med eller mot vågorna. Den hydrostatiska (eg. hydrodynamiska) tryckfördelningen ger upphov till ett mer eller mindre harmoniskt varierande fördelat torsionsmoment utefter skrovbalken. (Observera att till skillnad från böjmomentet räcker det inte med ett snittvärde för att bestämma spänningarna utan hela fördelningen måste modelleras i analysen)



I figuren här bredvid visas spektrumoperatoren i kortkammig sjö för torsionsmomentet som funktion av relativa vågriktningen för ett fartyg med  $C_B$  0,65 och en fart motsvarande  $F_{NL}$  0,22.

180° relativ riktning motsvarar mötande sjö

Lloyd's Rules (1992) anger ett dimensionerande torsionsmoment för öppna containerfartyg enligt:



*Hydrodynamic pressure distribution at the hull of a container ship in an oblique wave*

$M_T$  = the hydrodynamic torque amidships, in kN m (tonne-f m), given by:

$$9,81 e^{-0,00295L} \frac{LB^3 C_T}{10000} \left( 1,75 + 1,5 \frac{\epsilon}{D} \right) \text{ kN m}$$

$$\left( e^{-0,00295L} \frac{LB^3 C_T}{10000} \left( 1,75 + 1,5 \frac{\epsilon}{D} \right) \text{ tonne-fm} \right)$$

where  $e$  = base of natural logarithms, 2,7183

$$C_T = 13,2 - 43,4 C_W + 78,9 C_W^2$$

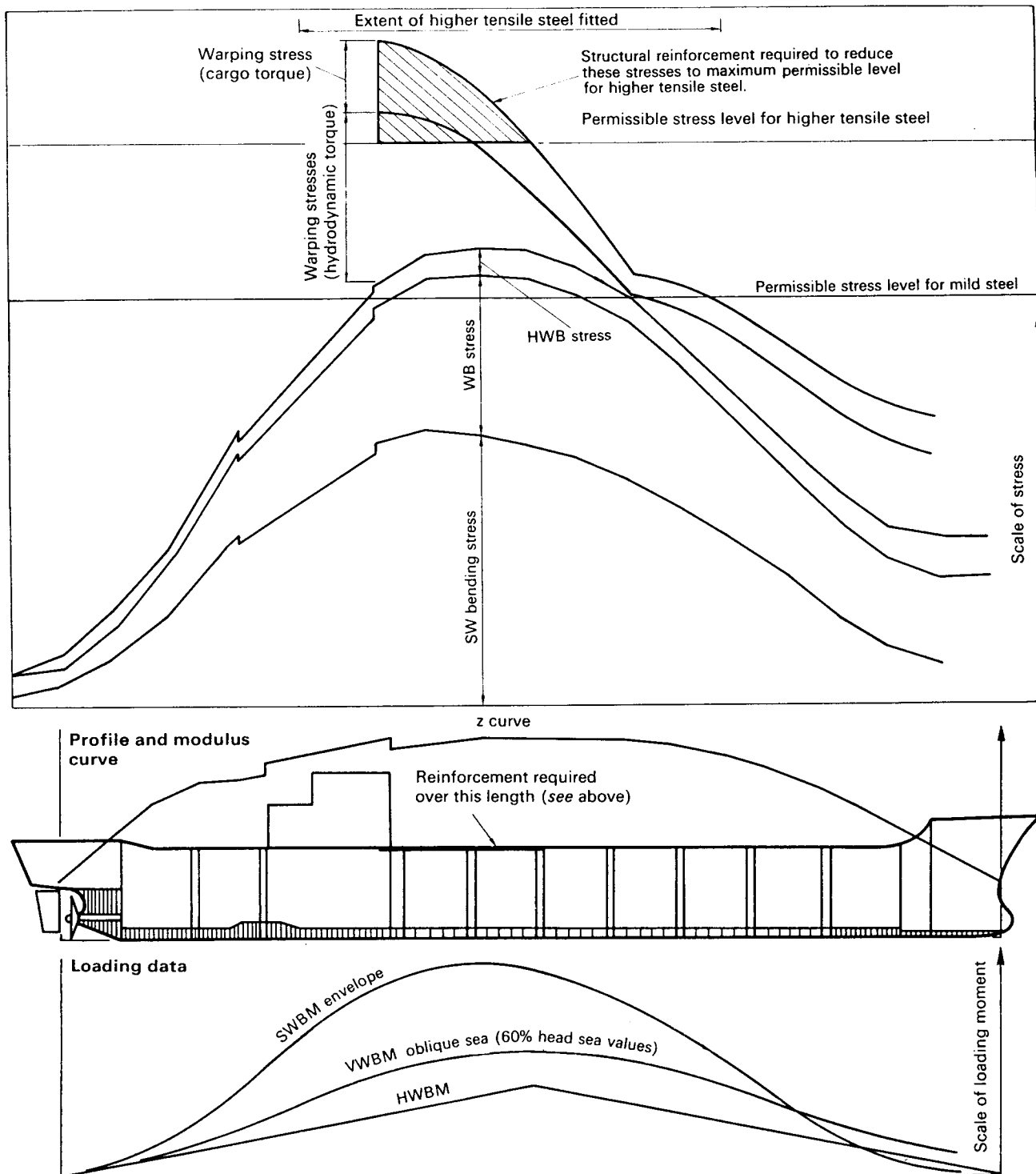
$C_W$  = the water plane area coefficient, but need not exceed: 0,165 + 0,95  $C_{b1}$

$\epsilon$  = the distance, in metres, of the sheer centre below the base line of the ship.

The distribution of  $M_T$  along the length of the ship is to follow a curve of  $(1 - \cos \alpha)$  form, where  $\alpha$  is a periodic function of  $L$ .

## Kombinerade längskeppspänningar i skrovbalken

Följande principbild ur LR visar hur välvnormalspänningarna i däck överlagras böjspänningarna (vertikala och horisontella) vilket ofta leder till behov av höghållfast stål i de centrala däckspartierna.



### NOTES

1. These diagrams are for illustration only and are not to scale.
2. A similar diagram is to be prepared for bottom.

Fig. 8.3.2 Combined stress diagram for deck – Oblique sea condition

## Utdrag ur DnV Classification Notes 'Bulk Carriers and Containerships' 1(5)

### 5. ADDITIONAL STRENGTH ANALYSIS OF OPEN TYPE BULK CARRIERS AND CONTAINER SHIPS

#### 5.1 General

**5.1.1** For ships with large deck openings (total width of hatch openings in one transverse section exceeding 65 % of the ship's breadth  $B$  and length of hatch opening exceeding 75 % of hold length) the Rules require the combined effects of hull girder bending, hull girder torsion and local bending and shear to be specially considered.

**5.1.2** In addition to the stresses derived from the structural models described in Section 3 the longitudinal warping stresses and local bending and shear stresses in the longitudinal and transverse deck strips arising in open type ships will have to be evaluated. The evaluation is to be based on a sufficiently accurate method for calculating the hull girder response to possible stillwater torsional moment,  $M_{sT}$ , and wave torsional moment,  $M_{wT}$ .

The method may be based on beam theory paying due attention to non-prismatic effects and torsional restraints due to the transverse and longitudinal deck strips and torsion boxes as well as the effects of the ship ends. Alternatively a finite element analysis may be applied.

**Note:**

Deformations calculated should be discussed with manufacturer of hatch covers.

As practical limits are indicated:

Relative warping deformation:  $b/1000$

Bending deflection of coaming:  $l_c/1000$

$b$  = breadth of hatch opening.

$l_c$  = length of side or end coaming.

**5.1.3** The design value of  $M_{sT}$  is to be taken in accordance with the most unfavorable uneven distribution of cargo and ballast in the transverse direction. Design values less than 20 000 kN · m may normally be neglected.

**5.1.4** The wave torsional moments along the length of the ship corresponding to the Rule wave load conditions may be taken as:

$$M_{wT} = k_{T1} C_{wT} L B^2 C_{swl}^2 + k_{T2} C_{wT} L T C_b z_c \quad \{\text{kN} \cdot \text{m}\}$$

$$k_{T1} = 0.10 \sin^2 \left( 180 \frac{x}{L} \right)$$

$$k_{T2} = 0.38 \sin \left( 360 \frac{x}{L} \right)$$

$C_{wT} = C_w$  as defined in the Rules Pt.3 Ch.1 Sec. 4.B using  $0.7 L$  instead of  $L$ .

$C_{swl} =$  the summer load waterplane area coefficient.

$z_c =$  distance in m from the shear centre to a level  $0.6 T$  above the baseline of the ship.

The formula for  $M_{wT}$  is based on a fairly constant value of  $z_c$ . At larger areas of closed hull girder section (e.g. at ship's ends)  $z_c$  may be adjusted.

$x =$  longitudinal distance from FP or AP to any transverse section. For ships with machinery and accommodation in the aftbody,  $x$  should be taken from FP. For ships with accommodation forward and open deck aft,  $x$  should be taken from AP.

## Utdrag ur DnV Classification Notes 'Bulk Carriers and Containerships' 2(5)

For slender ships designed to carry cargo on decks at great distance from the waterline (i.e. containers on weather deck), the torsional moment due to rolling will be specially considered.

**5.1.5** The various nominal normal stress components are to be combined according to the following principle formula:

$$\sigma = \sum_1^{n_s} \sigma_s + \sqrt{\sum_1^{n_d} (\sigma_d)^2}$$

$\sigma_s$  = static normal stress component

$n_s$  = number of relevant static stress components

$\sigma_d$  = dynamic stress component

$n_d$  = number of relevant dynamic stress components.

The combined normal stress is normally not to exceed the following values:

$\sigma = 150 f_1 \text{ N/mm}^2$  when only stress components from hull girder bending are considered.

$\sigma = 190 f_1 \text{ N/mm}^2$  when all relevant stress components from hull girder and local bending are considered.

**5.1.6** The various nominal shear stress components are to be combined according to the following principle formula:

$$\tau = \sum_1^{m_s} \tau_s + \sqrt{\sum_1^{m_d} (\tau_d)^2}$$

$\tau_s$  = static shear stress component.

$m_s$  = number of static shear stress components.

$\tau_d$  = dynamic shear component.

$m_d$  = number of dynamic shear stress components.

The combined shear stress is normally not to exceed the following values:

$\tau = 110 f_1 \text{ N/mm}^2$  when only stress components from hull girder shear and torsion are considered.

$\tau = 120 f_1 \text{ N/mm}^2$  when all relevant stress components from hull girder shear and torsion and local shear are considered.

**5.1.7** The various nominal longitudinal normal stress components are to be combined according to the principle formula given in 5.1.5.

Any of the following normal stress components may be relevant:

- Longitudinal stillwater and wave bending stresses.
- Longitudinal warping stresses due to  $M_{sT}$  and  $M_{wT}$ .
- Bending stresses in longitudinal deck strip due to warping deformations (from  $M_{sT}$  and  $M_{wT}$ ).
- Bending stresses in longitudinal deck strip due to static and dynamic lateral load on ship's side.

## Utdrag ur DnV Classification Notes 'Bulk Carriers and Containerships' 3(5)

Corresponding tensile or compressive stress components are to be applied.

**5.1.8** The various nominal shear components in longitudinal deck structures are to be combined according to the principle formula given in 5.1.6.

Any of the following shear stress components may be relevant:

- Shear stresses due to hull girder stillwater and wave shear force.
- Hull girder shear stresses due to  $M_{sT}$  and  $M_{wT}$ .
- Shear stresses due to warping deformation (from  $M_{sT}$  and  $M_{wT}$ ).
- Shear stresses due to static and dynamic lateral load on ship's side.

**5.1.9** For the transverse deck strips between hatches the transverse stress components are to be calculated taking into account the following items, whichever is relevant:

- Bending, shear and axial load due to lateral pressure on bulkhead and ship's sides from cargo, ballast and sea.
- Warping deformations of transverse strips due to  $M_{sT}$  and  $M_{wT}$ .

The various nominal transverse normal stress components calculated are to be combined according to the principle formula given in 5.1.5.

The various nominal shear stress components calculated are to be combined according to the principle formula given in 5.1.6.

### 5.2 Hatch corners

**5.2.1** At the hatch corners of open type ships, large local stresses are introduced due to the combined effect of longitudinal and transverse bending and shear in the deck strips. The maximum combined tangential stress (in tension) at the deck plate edge in the various deck corners is to be evaluated. Special attention is to be given to hatch corners where narrow deck strips support heavily loaded transverse bulkheads (ballast, heavy cargo).

**5.2.2** The combined deck corner tangential stress (in tension) is obtained by multiplying the nominal stress components by appropriate notch factors and inserting in the following principle formula:

$$\sigma_f = 0.25 \sum_1^{n_s} (K_n \sigma_s) + 0.25 \sum_1^{m_s} (K_m \tau_s) + \sqrt{\sum_1^{n_d} (K_n \sigma_d)^2 + \sum_1^{m_d} (K_m \tau_d)^2}$$

$\sigma_s, \sigma_d, \tau_s, \tau_d, n_s, n_d, m_s$  and  $m_d$  are as given in 5.1.5 and 5.1.6.

Static stress components that will not occur simultaneously, are not to be combined. The phase relationship between the dynamic stress components is normally covered by the formula. Components completely out of phase with the others, may be omitted.

## Utdrag ur DnV Classification Notes 'Bulk Carriers and Containerships' 4(5)

$K_n$  and  $K_m$  are notch factors relevant to the various stress configurations. Each relevant notch factor is a function of the geometrical stress concentration factor and the micro conditions influenced by surface treatment and welding, and may be calculated from the formula:

$$K = K_\sigma(K_a - 0,3) \text{ or } K_\tau(k_a - 0,3)$$

$K_\sigma$  and  $K_\tau$  = stress concentration factor depending on geometrical form and stress configuration (for nominal normal or shear stress). Relevant values may be found in the literature or estimated from detailed finite element analysis.

As the position of maximum tangential stress along the corner edge will be different for the various load cases, the distribution of the stress components must also be considered when combining. For circular corners a good approximation is obtained by observing:

- Stress components in longitudinal deck strip will have maximum stress concentration factor at a position 30 degrees from the transverse radius vector of the corner. At the same time 60% of maximum stress factor values for stress components in transverse deck strip may be used at this position.
- Stress components in transverse deck strip will have maximum stress concentration factor at a position 35 degrees from the longitudinal radius vector of the corner. At the same time 50% of maximum stress factor values for stress components in longitudinal deck strip may be used at this position.

$K_a$  = micro-notch factor.  
= 1,5 for ground plate edges without weldments or with butt welds and K-welds.  
= 2,0 for plating with continuous fillet welds.

**5.2.3** The maximum deck corner tensile stress  $\sigma_r$ , as calculated in accordance with 5.2.2, is not to exceed:

$$295 \sqrt{f_1} (0,6 + 0,4\alpha) \text{ \{N/mm}^2\}$$

$\alpha$  = usage factor.  
= 0,9 for ships with class notation **HC**.  
= 1,0 for other dry cargo or container ship.

### 5.3 Longitudinal deck girders between hatch openings

**5.3.1** In ships with twin or triple hatchways in the strength deck the longitudinal girders between hatches are to be designed with due consideration of the effect of longitudinal stresses and of relevant vertical and transverse loads from containers and other cargo on hatch covers and in holds, at sea and during loading.

**5.3.2** The effective sectional area which may be included in the midship section modulus, is to be determined with regard to the length of the longitudinal deck strip and the stiffness of the supporting transverse deck strips, especially towards the ends of the ship.

## Utdrag ur DnV Classification Notes 'Bulk Carriers and Containerships' 5(5)

As an approximation 60% of the sectional area may normally be used. This value may be increased to 75% where very stiff transverse deck strips and end supports are provided. Specific values based on computer calculations may be accepted.

Longitudinal hatch coamings may be included in the girder area, even if they are not continuous between hatches, provided they have sufficient buckling strength.

**5.3.3** The longitudinal deck girders are to be given a smooth transition into the transverse deck areas, especially at their end supports.

Local bending and shear stress are to be combined with longitudinal stresses as outlined in 5.1.

**5.3.4** Transverse deck strips supporting the ends of the longitudinal girders are to be specially considered for the longitudinal forces from the girders. Such forces may be taken as:

$$P_s = \frac{100 M_s(\max) A_g}{Z_{bd}} \quad \{\text{kN}\}$$

$$P_d = \frac{100 M_w(\max) A_g}{Z_{bd}} \quad \{\text{kN}\}$$

$M_s(\max)$  = design stillwater bending moment in  $\text{kN} \cdot \text{m}$  amidship, see the Rules Pt.3 Ch.1 Sec.5 B.

$M_w(\max)$  = Rule wave bending moment in  $\text{kN} \cdot \text{m}$  amidships, see the Rules Pt.3 Ch.1 Sec.5 B.

$Z_{bd}$  = hull girder section modulus at deck as built in  $\text{cm}^3$ .

$A_g$  = net sectional area in  $\text{cm}^2$  of girder as referred to in 5.3.2.

When in tension, longitudinal hatch coaming are to be included, even if the buckling strength is not sufficient.

Static and dynamic stresses induced in the transverse deck strip by these forces are to be included in the formulae in 5.1.5 and 5.1.6, where relevant.



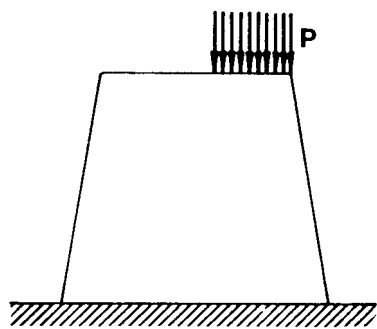
## Vad är finita element metoden - FEM ?

Finita element metoden är en numerisk lösningsmetod som används inom fältproblem som t ex:

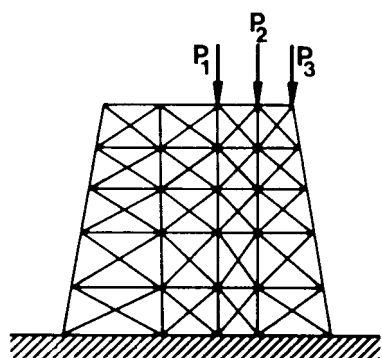
Strukturmekanik (statik, dynamik, kollaps mm)

Strömningsmekanik (flöden, tryck mm)

'Termomekanik' (värmeöverföring mm)



a) Structure



b) Model

Kontinuerliga strukturer (medier etc) delas upp i ett ändligt antal element sammanbundna med varandra i diskreta punkter, noder. För varje delement är det interna tillståndet - t ex förskjutningar och krafter - entydigt bestämt av tillståndet i noderna. Hela strukturens tillstånd blir således beskrivet av tillståndet i alla noder, dvs ett kontinuerligt problem blir diskretiserat och därmed anpassat till att lösas med numeriska metoder.

Balkmetoder formulerade i matrisform kan sägas utgöra ett specialfall av FEM, med 1-dimensionella (men nog så användbara och avancerade) element.

FEM utvecklades under 50 - 60-talet ur matrisformulerad strukturanalys, men har senare fått en mera allmän och generell matematisk formulering.

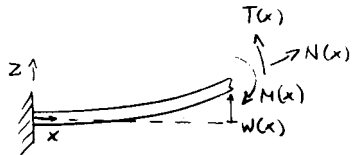
Syftet med denna introduktion är att ge en inblick i hur finita element för strukturanalys kan formuleras i allmänna termer. En stor del av SSD ägnas åt att beskriva skräddarsydda element för analys av fartygsstrukturer som paneler, bärande balkar, skrovsektioner etc. I de flesta fall är man idag som användare av FEM, hänvisad till generella programsystem med standardiserade elementtyper. Det är därför viktigt att ha förståelse för de begränsningar och möjligheter som ges av dessa elements egenskaper.

Som "normal" användare av FEM är man för övrigt mera betjänt av att ha goda kunskaper i hur strukturer uppför sig och kan modelleras, än av hur datorprogrammet fungerar. (FEM ger mycket goda möjligheter att räkna på alldeles fel saker !)

## Varför behövs FEM ?

Analytiska beräkningsmodeller finns framtagna för en rad enkla konstruktionselement med avseende på deformationer och spänningar under en given väldefinierad last.

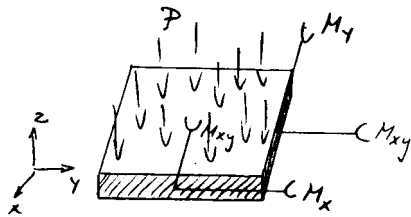
T ex  
Slanka balkar:



$$\sigma_x(x, z) = \frac{M(x) \cdot z}{I_y(x)} + \frac{N(x)}{A(x)}$$

$$w''(x) = \frac{-M(x)}{E \cdot I_y(x)}$$

Plattor:



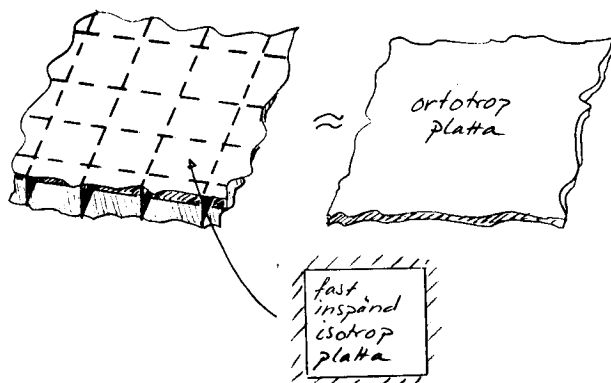
$$\sigma_x = \frac{12 \cdot z}{t^3} \cdot M_x$$

$$\sigma_y = \frac{12 \cdot z}{t^3} \cdot M_y$$

$$\tau_{xy} = \frac{12 \cdot z}{t^3} \cdot M_{xy}$$

$$\Delta \Delta w = \frac{P}{D} \quad D = \frac{E \cdot t^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)}$$

De flesta konstruktioner är alltför komplicerade för att kunna behandlas i sin helhet med en analytisk modell.



För att minska komplexiteten tillgriper man approximativa lösningar med förenklade modeller (idealiseringar)

eller gör en uppdelning i delstudier

Ofta kan enkla analytiska modeller vara tillräckliga för överslagsberäkningar, men de ger sällan möjlighet till detaljstudier av komplicerade geometrier och belastningsfall, eller av kopplingen mellan olika element i sammansatta strukturer.

Genom FEM kommer man förbi dessa begränsningar eftersom godtyckliga geometrier kan modelleras - med tillräckligt små element - och alla kopplingar mellan element bara beskrivs genom krafter och förskjutningar i noderna. Den 'interna' beskrivningen av delementens egenskaper kan i princip göras godtycklig så länge egenskaperna i noderna kan föras över i resten av strukturen.

Metodens precision beror på:

### Elementindelning

- \* hur väl geometrin kan återges av elementen
- \* hur väl lasterna kan återges av nodlaster  
(bägge dessa krav är således beroende av hur fin elementindelningen görs, i princip borde man kunna få modellen att konvergera mot verkligheten om antalet element går mot oändligheten)

### Elementbeskrivning

- \* hur väl elementens egenskaper kan återge materialets egenskaper

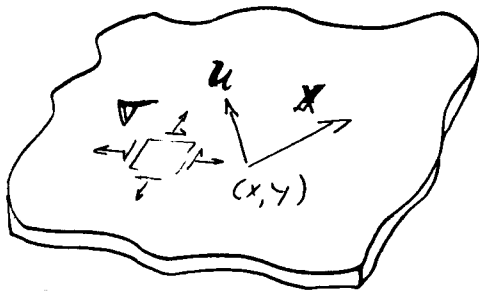
Exempel på standard element:

Type No	Element	DOF per element	Description
1		2 2	Straight rod element Constant strain Field problems x)
2		6 3	Triangular element Constant strain membrane, orthotropic Field problems
3		8	Quadrilateral membrane element. Linear normal stresses, constant shear stress, orthotropic.
4		12	Centric or excentric beam element with shear deflection. x)
5		12	Beam elements including shear deflection. Several cross-section types. Variable rigid lengths and rotational fixity at the nodes.
6		12 12	Straight tube element Curved tube element

Type No	Element	DOF per element	Description
7		15	Triangular thin shell element. Constant strain membrane action, linear moment distribution. Orthotropic.
8		20	Quadrilateral thin shell element. Membrane action according to quadrilateral membrane element. Bending action by two layers of triangular bending elements. Orthotropic.
9		3	Triangular ring element. Field problems.
10		24 8	Eight nodes isoparametric solid element. Linear shape function. Isotropic material properties. Structural analysis. Field problems.
11		60 20	Twenty nodes isoparametric solid element. Parabolic shape function. Structural analysis. Isotropic material properties. Field problems. Conditional orthotropic material properties.

## Introduktion till teorin

### Beskrivning av tillståndet i ett element



Tillståndet i en godtycklig skiva kan beskrivas av följande funktioner som varierar med koordinaterna i skivan:

Yttre krafter (per volymsenhet)

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_x(x, y) \\ X_y(x, y) \end{pmatrix}$$

Förskjutningar

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x(x, y) \\ u_y(x, y) \end{pmatrix}$$

Töjningar

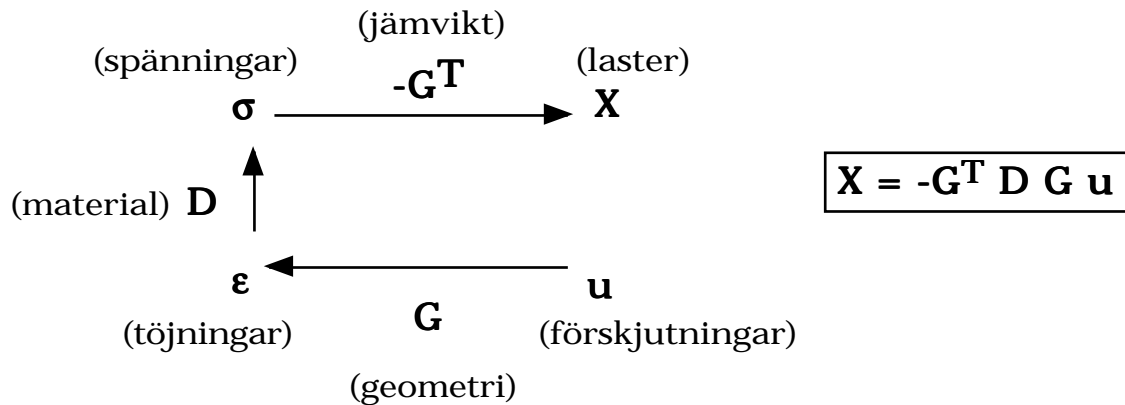
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x(x, y) \\ \varepsilon_y(x, y) \\ \gamma_{xy}(x, y) \end{bmatrix}$$

Spänningar

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x(x, y) \\ \sigma_y(x, y) \\ \tau_{xy}(x, y) \end{bmatrix}$$

I elementanalysen beskriver man sambandet mellan de interna tillståndsfunktionerna ovan och tillståndet i elementens noder.

## Allmänna samband för tillståndet i en skiva



Geometriska samband: (kompatibilitet)

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}$$

$\epsilon = \mathbf{G} \mathbf{u}$

Konstitutiva samband:

(Plant spänningstillstånd, isotropt material)

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

$\sigma = \mathbf{D} \epsilon$

Jämviktsekvationer:

$$\begin{bmatrix} X_x \\ X_y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{X} = -\mathbf{G}^T \sigma$

För ett finit element beskrivs dessa allmänna tillstånd som funktion av förskjutningar  $\delta$  och krafter  $\mathbf{f}$  i noderna.

## Virtuella arbetets princip

är en omformulering av jämviktsvillkoren som ofta används för härledning av olika finita element. Här ges bara en mycket förenklad framställning. Mera stringenta härledningar finner man i speciallitteratur om FEM.

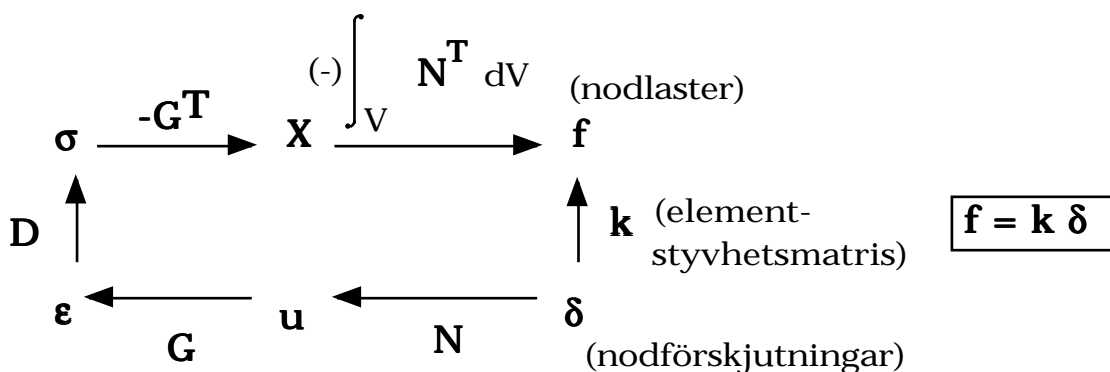
Vi låter  $\mathbf{u}^x$  och  $\boldsymbol{\varepsilon}^x$  representera en "virtuell" förskjutning respektive töjning. Det yttre virtuella arbetet  $W_e$  från yttre krafter, och det inre virtuella arbetet  $W_i$  från spänningsfältet kan skrivas

$$W_e = \int_V \mathbf{u}^{xT} \cdot \mathbf{X} \, dV$$

$$W_i = \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^{xT} \cdot \boldsymbol{\sigma} \, dV$$

Villkoret  $W_e = W_i$  ger ett samband mellan laster och förskjutningar som kan användas för att definiera en elementstyvhet

I ett finit element ska dock styvheten representeras av sambandet mellan krafter och förskjutningar i noderna. Vi får därför lägga till ytterligare ett steg i den allmänna tillståndsbekrivningen:



$\mathbf{N}$  är en formfunktion som beskriver det geometriska sambandet mellan nodförskjutningar och allmänt förskjutningstillstånd i elementet, resp jämvikts samband (-) mellan nodkrafter och volymskrafter i elementet, eller volymskrafterna uttryckta som ekvivalenta nodkrafter (+).

## Elementstyhetsmatris

Elementstyhetsmatrisen  $\mathbf{k}$  kan beräknas ur virtuella arbetets princip:

Yttre virtuellt arbete:

$$W_e = \int_V \mathbf{u}^{\mathbf{xT}} \cdot \mathbf{X} \, dV$$

$$\mathbf{u}^{\mathbf{x}} = \mathbf{N} \cdot \delta^{\mathbf{x}}$$

ger

$$\mathbf{u}^{\mathbf{xT}} = \delta^{\mathbf{xT}} \cdot \mathbf{N}^{\mathbf{T}}$$

$$W_e = \int_V \delta^{\mathbf{xT}} \cdot \mathbf{N}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{X} \, dV$$

Inre virtuellt arbete:

$$W_i = \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{xT}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \, dV$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{x}} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{u}^{\mathbf{x}} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{N} \cdot \delta^{\mathbf{x}} = \mathbf{B} \cdot \delta^{\mathbf{x}}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{xT}} = \delta^{\mathbf{xT}} \cdot \mathbf{B}^{\mathbf{T}}$$

ger

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \cdot \delta$$

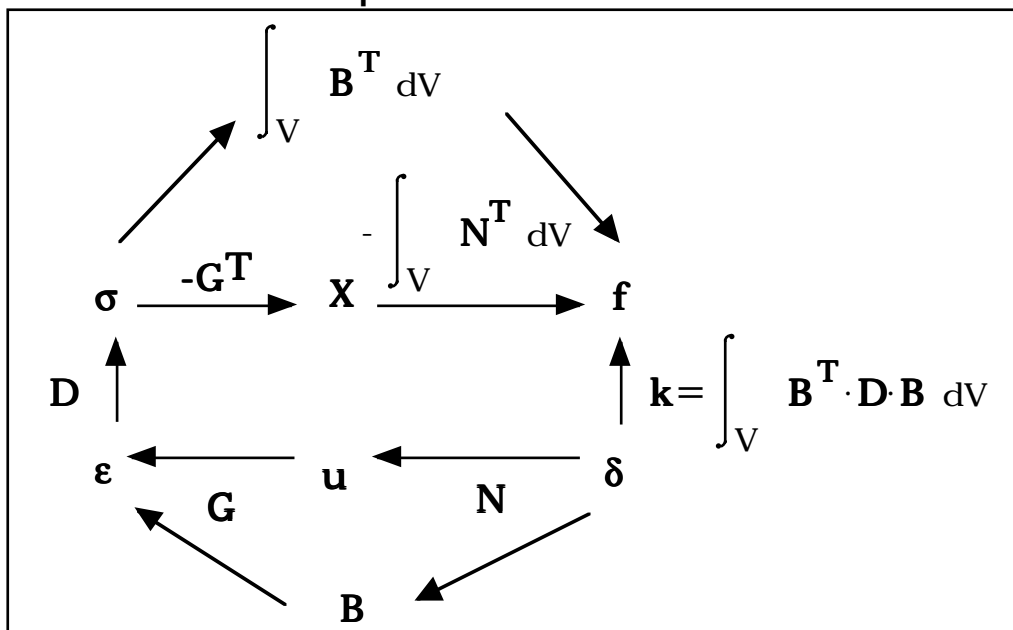
$$W_i = \int_V \delta^{\mathbf{xT}} \cdot \mathbf{B}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \cdot \delta \, dV$$

$W_e = W_i$  samt eliminering av virtuella nodförskjutningen ger

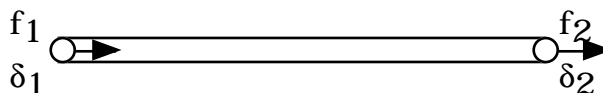
$$\int_V \mathbf{N}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{X} \, dV = \int_V \mathbf{B}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \, dV \cdot \delta$$

dvs  $\mathbf{f} = \mathbf{k} \cdot \delta$  med  $\mathbf{k} = \int_V \mathbf{B}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \, dV$

## Sammanfattning av de olika matrisoperationerna i en elementbeskrivning



Exempel på härledning av  
elementstyvhetsmatris:  
Stångelement



Förskjutningsansats:  $\mathbf{u}$

Vi börjar med att definiera en allmän förskjutningsansats. Eftersom det bara finns två frihetsgrader i elementet kan ansatsen bara innehålla två oberoende parametrar.

linjär förskjutning:

$$u_x = C_1 + C_2 \cdot x$$

$$\mathbf{u} = (1 \quad x) \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{C}$$

Formfunktion:  $\mathbf{N}$

(koordinatfunktion)

Sätter vi in koordinaterna  $x=0$  resp  $x=L$  i förskjutningsansatsen erhålls

$$\delta_1 = C_1 \quad \delta_2 = C_1 + C_2 \cdot L$$

$$\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\delta} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$$



Elementstyvhetmatris för stängelement (forts)

Formfunktion:  $\mathbf{N}$  (forts)

Vi uttrycker förskjutningsansatsens koefficienter som funktion av nodförskjutningarna:

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{\delta}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{\delta} = \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\delta} \quad \text{ger}$$

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{pmatrix}$$

Geometrisk kompatibilitet:  $\mathbf{G}, \mathbf{B}$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d}{dx} \mathbf{u} = \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\delta} = \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\delta}$$

Konstitutivt samband:  $\mathbf{D}$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{operatorm } D = \text{elasticitetsmodulen } E)$$

Jämviktsekvationer:  $\int_V \mathbf{B}^T dV$

$$\mathbf{f} = \int_V \mathbf{B}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_V \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\delta} dV$$

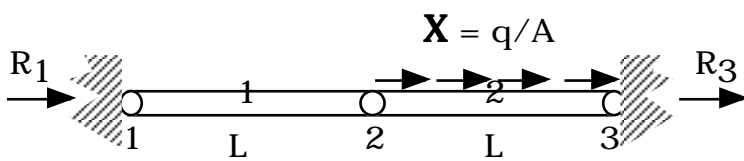
$$\mathbf{f} = \int_0^L \begin{pmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} \cdot E \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} \cdot A dx = \frac{E \cdot A}{L} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} \quad \boxed{\mathbf{f} = \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\delta}}$$

## Strukturanalys

I strukturanalysen kopplas elementstyhheterna samman (assembleras) till strukturstyhhetsmatrisen  $\mathbf{F} = \mathbf{K} \Delta$

I de flesta fall är lasten (uttryckt som volym-, rand- eller nodlast) känd och deformationerna sökes. Lasten konverteras till ekvivalenta nodlaster varefter nodförskjutningarna löses ur ekvationssystemet ovan. När nodförskjutningarna är kända kan spänningarna i varje enskilt element beräknas.

### Exempel



Två sammanbundna stänger, lästa i ytterändarna, den ena stängen belastad med en jämt fördelad axiell "volymlast"  $\mathbf{X} = q/A$

Ekvivalenta nodlaster beräknas som:  $\int_V \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{X} dV$

(Observera omvänt tecken mot jämviktsekvationerna)

$$\mathbf{f}_2 = \int_0^L \begin{pmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{pmatrix} \cdot \frac{q}{A} \cdot A dx = q \cdot \begin{bmatrix} L - \frac{L^2}{2 \cdot L} \\ \frac{L^2}{2 \cdot L} \end{bmatrix} = \frac{q \cdot L}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Elementstyhheterna är:

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 = \frac{E \cdot A}{L} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Strukturekvationen blir:

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ \frac{q \cdot L}{2} \\ R_3 + \frac{q \cdot L}{2} \end{bmatrix} = \frac{E \cdot A}{L} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I ekvationen ovan har även reaktionskrafterna satts in. För att lösa förskjutningen  $\Delta_2$  kan dock bara den markerade ekvationen användas (systemet har bara en frihetsgrad).

## Exempel, strukturanalys (forts)

Förskjutningen blir:

$$\text{(rad 2)} \quad \frac{q \cdot L}{2} = \frac{E \cdot A}{L} \cdot 2 \cdot \Delta_2 \quad \Delta_2 = \frac{q \cdot L^2}{4 \cdot E \cdot A}$$

och reaktionskrafterna:

$$\text{(rad 1)} \quad R_1 = \frac{E \cdot A}{L} \cdot (-\Delta_2) \quad R_1 = -\frac{q \cdot L}{4}$$

$$\text{(rad 3)} \quad R_3 + \frac{q \cdot L}{2} = \frac{E \cdot A}{L} \cdot (-\Delta_2) \quad R_3 = -\frac{3 \cdot q \cdot L}{4}$$

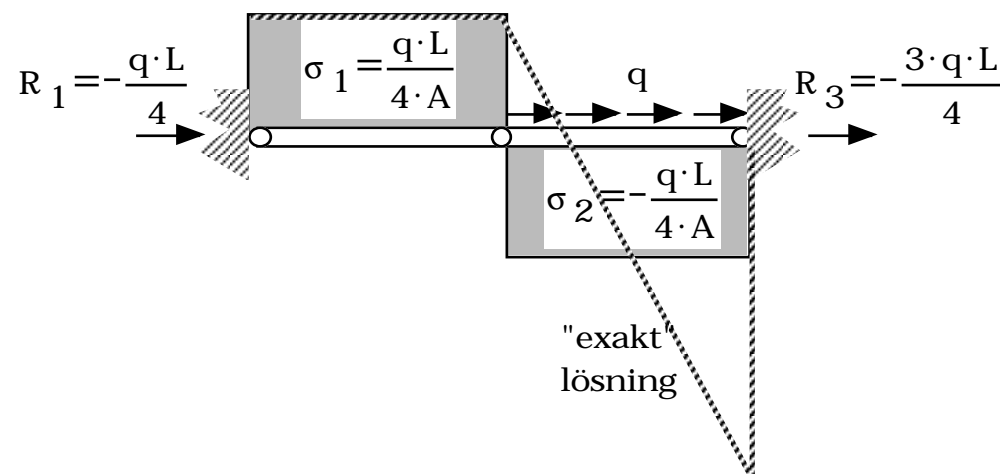
Töjningen i elementen:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\delta} \quad \varepsilon_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta_2 \end{pmatrix} = \frac{q \cdot L}{4 \cdot E \cdot A}$$

$$\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta_2 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{q \cdot L}{4 \cdot E \cdot A}$$

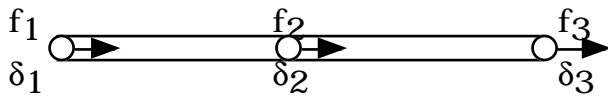
Spänningar i elementen:

$$\boldsymbol{\sigma} = E \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad \sigma_1 = \frac{q \cdot L}{4 \cdot A} \quad \sigma_2 = -\frac{q \cdot L}{4 \cdot A}$$



Om vi jämför med den 'exakta' analytiska lösningen ser vi att begränsningarna i elementets förskjutningsansats tämligen dåligt återger spänningarna. För att öka precisionen måste vi använda flera element. Eftersom 2-noders stängelement bara kan återge konstanta spänningar kommer vi dock aldrig att helt kunna återge den linjärt varierande spänningen i element nr 2. För att kunna göra det krävs ett mera avancerat stängelement.

## Exempel med 3-noders stågelement



Om vi lägger till en nod på mitten av stängen kan vi utnyttja ytterligare en parameter i förskjutningsansatsen.

### Elementstyvhet

Förskjutningsansats:  $\mathbf{u}$

$$u_x = C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot x^2$$

$$\mathbf{u} = (1 \quad x \quad x^2) \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{C}$$

Formfunktion:  $\mathbf{N}$

$$\delta_1 = C_1 \quad \delta_2 = C_1 + C_2 \cdot \frac{L}{2} + C_3 \cdot \frac{L^2}{4} \quad \delta_3 = C_1 + C_2 \cdot L + C_3 \cdot L^2$$

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} \\ 1 & L & L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\delta} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$$

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{L} & \frac{4}{L} & \frac{-1}{L} \\ \frac{2}{L^2} & \frac{-4}{L^2} & \frac{2}{L^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{\delta}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{\delta} = \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\delta} \quad \text{ger}$$

$$\mathbf{N} = (1 \quad x \quad x^2) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{L} & \frac{4}{L} & \frac{-1}{L} \\ \frac{2}{L^2} & \frac{-4}{L^2} & \frac{2}{L^2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \frac{1}{L^2} \cdot (L^2 - 3 \cdot x \cdot L + 2 \cdot x^2, \quad -4 \cdot x \cdot (-L + x), \quad x \cdot (-L + 2 \cdot x))$$



### 3-noders stängelement (forts)

Geometrisk kompatibilitet:  $\mathbf{G}$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d}{dx} \mathbf{u} = \frac{d}{dx} \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\delta} = \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\delta}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{L^2} \cdot \begin{pmatrix} -3 \cdot L + 4 \cdot x & 4 \cdot L - 8 \cdot x & -L + 4 \cdot x \end{pmatrix}$$

Konstitutivt samband:

$$\boldsymbol{\sigma} = E \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = E \cdot \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\delta}$$

Jämviktsekvationer:

$$\mathbf{f} = \int_V \mathbf{B}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \mathbf{B}^T \cdot E \cdot \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_V \mathbf{B}^T \cdot E \cdot \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\delta} dV$$

$$\mathbf{f} = E \cdot A \cdot \int_0^L \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{B} dx \cdot \boldsymbol{\delta}$$

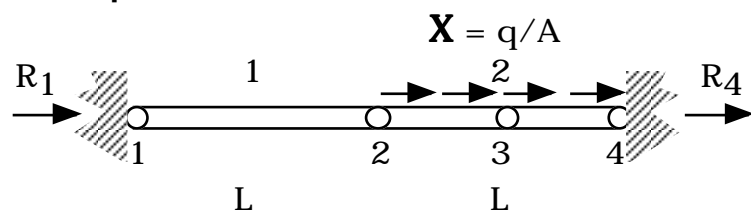
$$\mathbf{f} = \frac{E \cdot A}{L^4} \cdot \int_0^L \begin{pmatrix} -3 \cdot L + 4 \cdot x \\ 4 \cdot L - 8 \cdot x \\ -L + 4 \cdot x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \cdot L + 4 \cdot x & 4 \cdot L - 8 \cdot x & -L + 4 \cdot x \end{pmatrix} dx \cdot \boldsymbol{\delta}$$

$$\mathbf{f} = \frac{E \cdot A}{L^4} \cdot \int_0^L \begin{bmatrix} (-3 \cdot L + 4 \cdot x)^2 & -4 \cdot (-3 \cdot L + 4 \cdot x) \cdot (-L + 2 \cdot x) & (-3 \cdot L + 4 \cdot x) \cdot (-L + 4 \cdot x) \\ -4 \cdot (-3 \cdot L + 4 \cdot x) \cdot (-L + 2 \cdot x) & 16 \cdot (-L + 2 \cdot x)^2 & -4 \cdot (-L + 2 \cdot x) \cdot (-L + 4 \cdot x) \\ (-3 \cdot L + 4 \cdot x) \cdot (-L + 4 \cdot x) & -4 \cdot (-L + 2 \cdot x) \cdot (-L + 4 \cdot x) & (-L + 4 \cdot x)^2 \end{bmatrix} dx \cdot \boldsymbol{\delta}$$

$$\mathbf{f} = \frac{E \cdot A}{L^4} \cdot \left[ \begin{bmatrix} \frac{1}{12} \cdot L^3 & \frac{-8}{3} \cdot L^3 & \frac{1}{3} \cdot L^3 \\ \frac{-8}{3} \cdot L^3 & \frac{8}{3} \cdot L^3 & \frac{-8}{3} \cdot L^3 \\ \frac{1}{3} \cdot L^3 & \frac{-8}{3} \cdot L^3 & \frac{9}{4} \cdot L^3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{-9}{4} \cdot L^3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-8}{3} \cdot L^3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{12} \cdot L^3 \end{bmatrix} \right] \cdot \boldsymbol{\delta}$$

$$\mathbf{f} = \frac{E \cdot A}{3 \cdot L} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{\delta}$$

### Exempel



Samma exempel som tidigare men nu med ett 2-noders stängelement och ett 3-noders för att bättre kunna representera den utbredda axiella lasten

Styvhetsrelationen för systemet blir:

$$\mathbf{F} = \frac{E \cdot A}{3 \cdot L} \cdot \begin{bmatrix} \boxed{3} & \boxed{-3} & 0 & 0 \\ \boxed{-3} & \boxed{3+7} & \boxed{-8} & \boxed{1} \\ 0 & \boxed{-8} & \boxed{16} & \boxed{-8} \\ 0 & \boxed{1} & \boxed{-8} & \boxed{7} \end{bmatrix} \cdot \Delta$$

stäng 1 stäng 2

Ekvivalenta nodlaster från volymslasten  $X = q/A$  på element 2

$$\mathbf{f}_e = \int_0^L \mathbf{N}^T \cdot \frac{q}{A} \cdot A \, dx = q \cdot \int_0^L \frac{1}{L^2} \cdot \begin{bmatrix} L^2 - 3 \cdot x \cdot L + 2 \cdot x^2 \\ -4 \cdot x \cdot (-L + x) \\ x \cdot (-L + 2 \cdot x) \end{bmatrix} dx = \frac{q \cdot L}{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Strukturekvationen (inkl reaktionskrafter) blir:

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ \boxed{\frac{1}{6} \cdot q \cdot L} \\ \boxed{\frac{4}{6} \cdot q \cdot L} \\ R_4 + \frac{1}{6} \cdot q \cdot L \end{bmatrix} = \frac{E \cdot A}{3 \cdot L} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 10 & -8 & 1 \\ 0 & -8 & 16 & -8 \\ 0 & 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ur vilken vi kan lösa förskjutningar och därefter reaktionskrafter

Exempel 2- och 3-noders stängelement (forts)

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ \frac{1}{6} \cdot q \cdot L \\ \frac{4}{6} \cdot q \cdot L \\ R_4 + \frac{1}{6} \cdot q \cdot L \end{bmatrix} = \frac{E \cdot A}{3 \cdot L} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 10 & -8 & 1 \\ 0 & -8 & 16 & -8 \\ 0 & 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ger  $\Delta_2 = \Delta_3 = \frac{q \cdot L^2}{4 \cdot E \cdot A}$       $R_1 = -\frac{q \cdot L}{4}$       $R_4 = -\frac{3 \cdot q \cdot L}{4}$

(Samma som förut!)

Spänningar i elementen fås ur:

$$\sigma = E \cdot \epsilon = E \cdot \mathbf{B} \cdot \delta$$

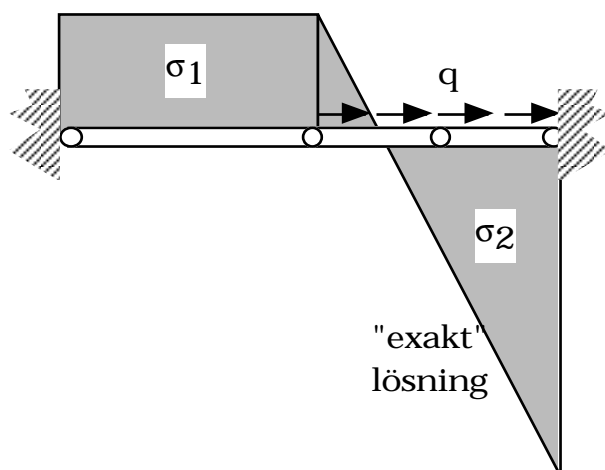
för element 1 får vi med tidigare definierat **B**:

$$\sigma = E \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{q \cdot L^2}{4 \cdot E \cdot A} \end{pmatrix} = \frac{q \cdot L}{4 \cdot A}$$

(samma som förut)

och för element 2:

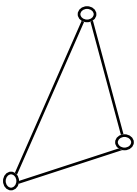
$$\sigma = \frac{E}{L^2} \cdot (-3 \cdot L + 4 \cdot x, 4 \cdot L - 8 \cdot x, -L + 4 \cdot x) \cdot \begin{bmatrix} \frac{q \cdot L^2}{4 \cdot E \cdot A} \\ \frac{q \cdot L^2}{4 \cdot E \cdot A} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{q}{4 \cdot A} \cdot (L - 4 \cdot x)$$



## Skivor belastade och deformerade i planet -Membranelement

Förskjutningsansatsen avgör hur väl elementen kan återge ett varierat deformations - spänningsfält. En mera 'avancerad' förskjutningsansats kräver flera frihetsgrader (noder).

### 3-noders triangel, CST



Det enklaste membranelementet är "Constant Stress Triangle", CST, en skivtriangel med 1 nod i varje hörn och sammanlagt 6 frihetsgrader.

#### Förskjutningsansatsen

$$u_x = C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot y$$

$$u_y = C_4 + C_5 \cdot x + C_6 \cdot y$$

(6 frihetsgrader)

$$\varepsilon_x = C_2$$

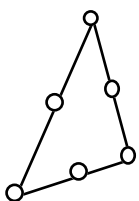
$$\varepsilon_y = C_6$$

$$\gamma_{xy} = C_3 + C_5$$

(konstanta töjningar)

Den enkla (styrda) förskjutningsansatsen gör att en CST-modell normalt ges för styva egenskaper. Fel pga detta kan minskas genom att, i områden med stora töjningsgradienter, införa tätare elementindelning. Triangelement går enkelt att förtäta, och de är lätta att anpassa till godtyckliga geometrier.

### 6-noders triangel



Ett mera avancerat element erhålls om man inför en extra nod på varje sida i triangeln:

#### Förskjutningsansatsen:

$$u_x = C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot y + C_4 \cdot x^2 + C_5 \cdot y^2 + C_6 \cdot x \cdot y$$

$$u_y = C_7 + C_8 \cdot x + C_9 \cdot y + C_{10} \cdot x^2 + C_{11} \cdot y^2 + C_{12} \cdot x \cdot y$$

(12 frihetsgrader)

$$\varepsilon_x = C_2 + 2 \cdot C_4 \cdot x + C_6 \cdot y$$

$$\varepsilon_y = C_9 + 2 \cdot C_{11} \cdot y + C_{12} \cdot x$$

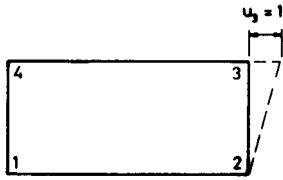
$$\gamma_{xy} = (C_3 + C_8) + (C_6 + 2 \cdot C_{10}) \cdot x + (2 \cdot C_5 + C_{12}) \cdot y$$

(linjärt varierande töjningar)



## Rektangel LSR

Det enklaste fyrkantselementet "Linear Strain Rectangle", LSR, har en linjärt varierande förskjutningsfunktion:



$$\begin{aligned} u_x &= C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot y + C_4 \cdot x \cdot y \\ u_y &= C_5 + C_6 \cdot x + C_7 \cdot y + C_8 \cdot x \cdot y \end{aligned} \quad (8 \text{ frihetsgrader})$$

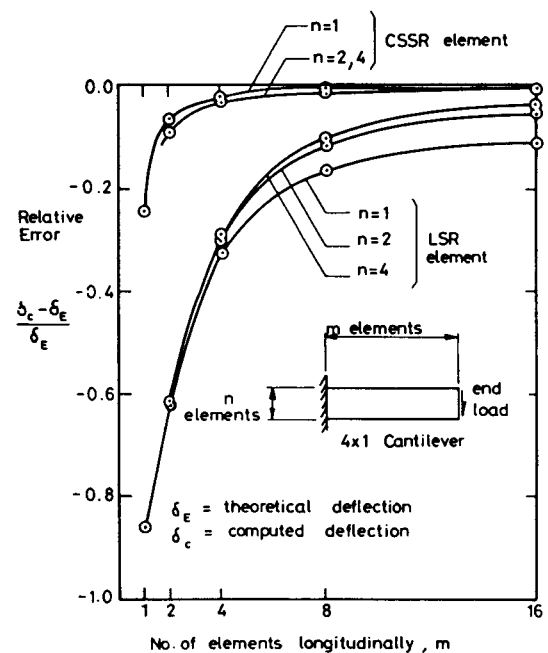
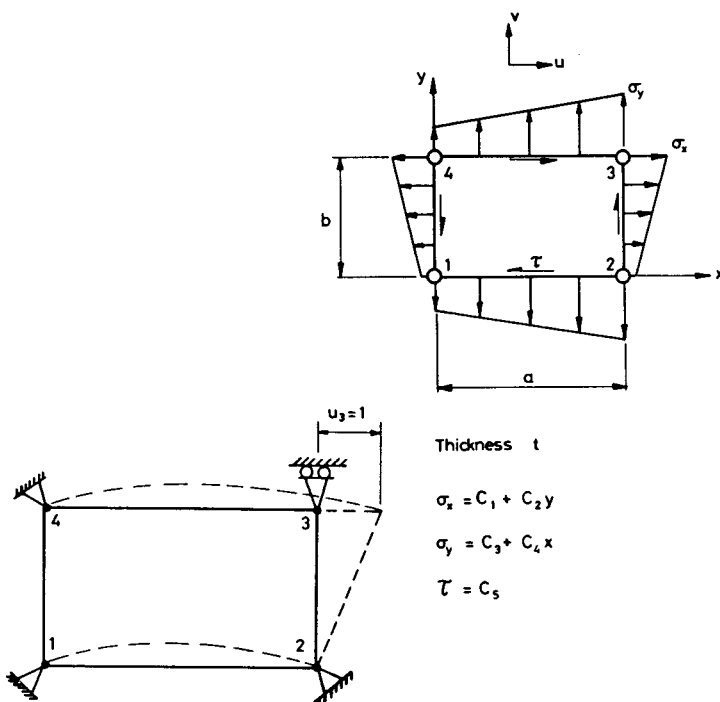
$$\begin{aligned} \epsilon_x &= C_2 + C_4 \cdot y \\ \epsilon_y &= C_7 + C_8 \cdot x \\ \gamma_{xy} &= C_3 + C_4 \cdot x + C_6 + C_8 \cdot y \end{aligned} \quad (\text{linjära töjningar})$$

Förskjutningsformen gör elementet överstyvt eftersom ingen lokal böjning sker mellan noderna.

Som alternativ till att ansätta en förskjutningsfunktion kan man välja att prioritera en spänningsansats och därigenom ge elementet 'skräddarsydda' egenskaper.

## CSSR

Exempel på ett mycket användbart sådant skivelement är "Constant Shear Stress Rectangle", CSSR, (el. Turner-element) ett element som extremt bra återger böjdeformationer (på viss bekostnad av kompatibilitet mellan elementränderna i angränsande element). (Turner-elementet var f.ö det första skivelementet för FEM)



## Isoparametriska element

är element som använder samma interpolationsfunktion för att beskriva elementets geometri (bestämd av nodkoordinaterna) som för att beskriva elementets förskjutningstillstånd (bestämt av nodförskjutningarna) dvs formfunktionen  $\mathbf{N}$ .

Både CST och CSR elementen kan på detta sätt geometriskt anpassas till godtyckliga hörnvinklar.

För 'Quadrilaterala' element (fyrhörningar) är det lämpligt att beskriva formfunktionen i 'naturliga' koordinater (s,t) med värdena (-1,1 1,1 1,-1 -1,-1) i hörnpunkterna. På detta sätt kan man göra en generell beskrivning av elementets egenskaper oberoende av de faktiska nodkoordinaterna.

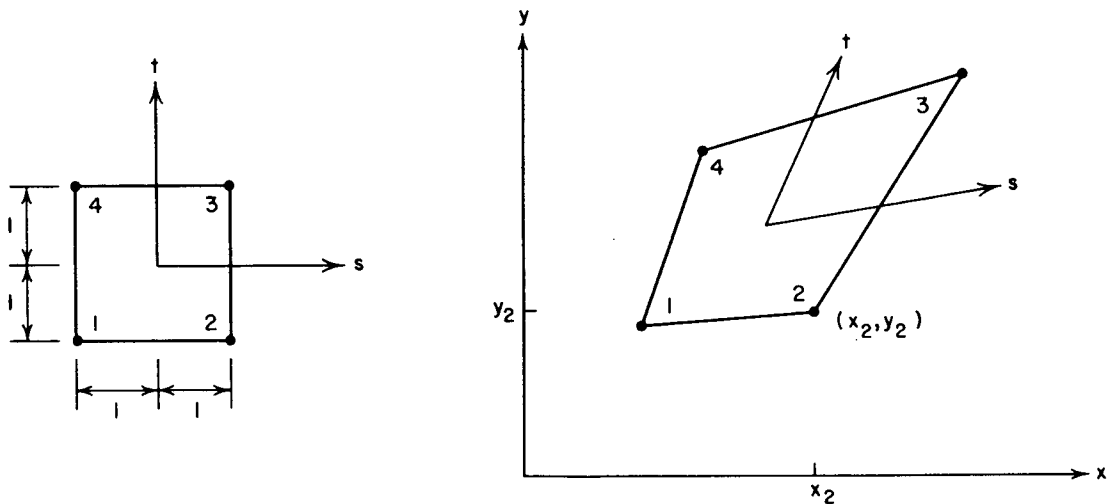
För en 4-noders fyrhörning kan man skriva

$$N_i(s, t) = \frac{1}{4} \cdot (1 + s_i \cdot s) \cdot (1 + t_i \cdot t) \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

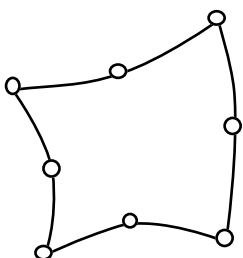
$$\mathbf{x}(s, t) = \mathbf{N}(s, t) \cdot \mathbf{x}_n(s, t)$$

$$\mathbf{u}(s, t) = \mathbf{N}(s, t) \cdot \boldsymbol{\delta}(s, t)$$

där  $\mathbf{x}$  anger koordinaten och  $\mathbf{u}$  förskjutningen som funktion av nodkoordinaterna  $\mathbf{x}_n$  respektive nodförskjutningarna  $\boldsymbol{\delta}$ .



## 8-noders Quadrilateral



8-noders isoparametriskt skivelement är ett mycket vanligt generellt element med god styvhetsrepresentation och som väl kan anpassas geometriskt till krökta former. Elementet återger paraboliska förskjutningar och linjära spänningsfördelningar.

För kroklinjiga element kan normalt inte styvhetsrelationen lösas genom analytisk integration. Istället används numerisk integration (Gausspunkter) som ger en approximativ lösning. Modellering av fartygsstrukturer med finita element

## Modellering av fartygsstrukturer med finita element

De överväganden som görs när man bygger upp en FE-modell kommer att få en avgörande betydelse för de resultat man kommer att få ut av beräkningen. Detta kan synas vara en självklarhet, men kan inte nog understrykas!

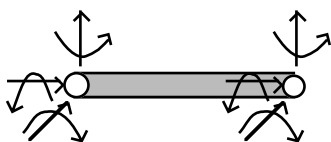
Det leder också till den slutsatsen att man först ska definiera vad man vill använda resultaten till, innan man börjar göra en modell. Helst ska man dessutom i förväg ha en relativt god uppfattning om hur resultaten kommer att se ut i princip (kvalitativt) eftersom modellen ska anpassas till det tillstånd som ska beskrivas!

I slutet på detta avsnitt ges en checklista över punkter som bör beaktas när man bygger upp en FE-modell

### Val av elementtyp och elementindelning ska styras av:

Till vad ska resultaten användas ? Hur stor noggrannhet behövs ? Hur ska lasterna påföras modellen ?
--

### Balkelement



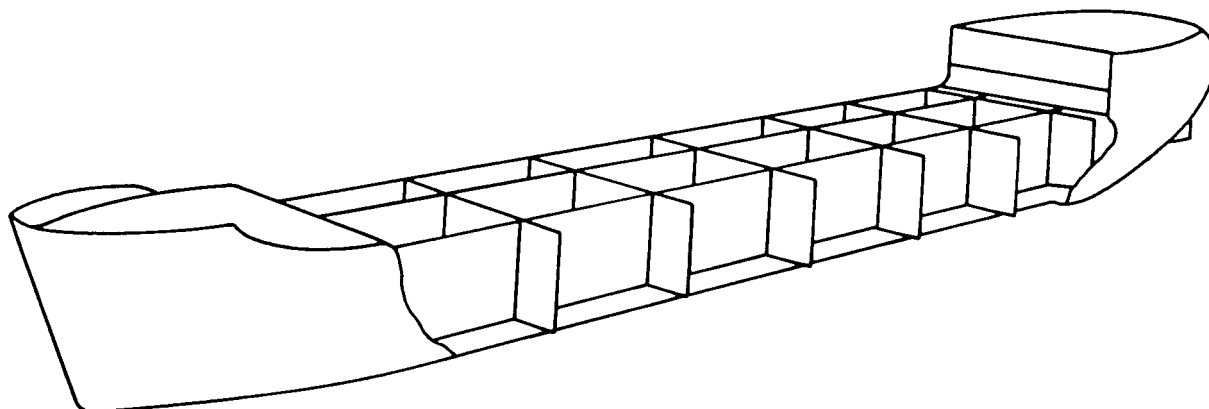
är mycket användbara för modellering av bärande konstruktionsförband i fartyg. Ett generellt 3-dim balkelement har 6 frihetsgrader i varje nod. Styvheten är kopplad till tvärsnittsarean, yttröghetsmomentet runt två vinkelräta axlar samt vridstyvheten.

I praktiken har bärande balkar oftast bara ett böjstyvt plan av intresse, vilket reducerar antalet storheter som behöver ges som indata till ett element.

Exempel på vanliga balkmodeller:

Övergripande studier av deformationer i skrovbalkens huvudkomponenter (bordläggning, däck, skott).

(Obs, i detta fall kan inte skjuvdeformationerna försummas.)

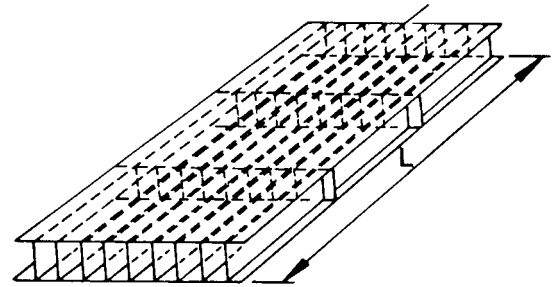
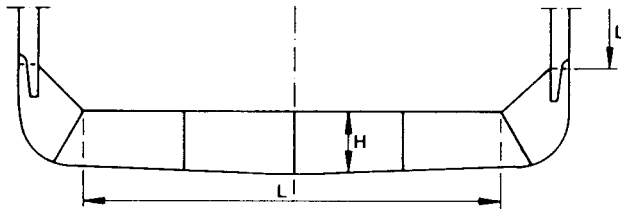


## Balkelement

Exempel (forts):

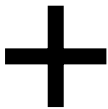
Primärt bärande styrkeförband, t ex bottenstrukturen.

Förstyvningarna (longitudinaler, spant) modelleras i detta fall inte som egna balkelement utan ingår med sin tvärsnittsarea i de primärt bärande balkarnas böjstyvhet.



Några fördelar med balkelement:

- Ger effektiva modeller dvs kan ge mycket information med relativt få element och frihetsgrader.
- Finns ofta i egna lättanvända skraddarsydda programsystem (ramverks- eller gallerverksprogram) vilket ger kort modelleringstid.
- Ger resultat i form av moment och tvärkrafter vilket direkt svarar mot de 'nominella' spänningskriterier som används av skrovbyggnadsregler

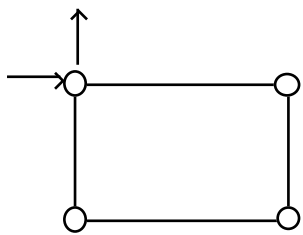


Några nackdelar med balkelement:

- Problem med att modellera 'shear lag'-effekten, ger olika inflytande på styvhet resp. lokal böjspänning.
- Problem att modellera brickområden, med hänsyn till skjuvdeformationer, varierad böjstyvhet etc.
- Relativt mycket manuellt arbete för att ta fram sektionsdata till balkelementen
- Svårt att visualisera resultaten. Generella FEM-program saknar ofta postprocessorer som kan återge resultaten grafiskt.



## Plana skivelement - Membranelement



används för att återge plåtarnas egenskaper i form av styvhet, drag-, tryck-, och skjuvspänningar i plåtarnas plan.

Fartygs bordläggningssplåtar har två huvudfunktioner som lastbärare:

att ta upp det lokala trycket och föra över det till förstävningarna som sedan för lasterna vidare i den bärande strukturen. I denna funktion är plåtfältet lateralt belastat och deformerat som en platta. Ett membranelement kan överhuvudtaget inte användas för att återge dessa egenskaper!

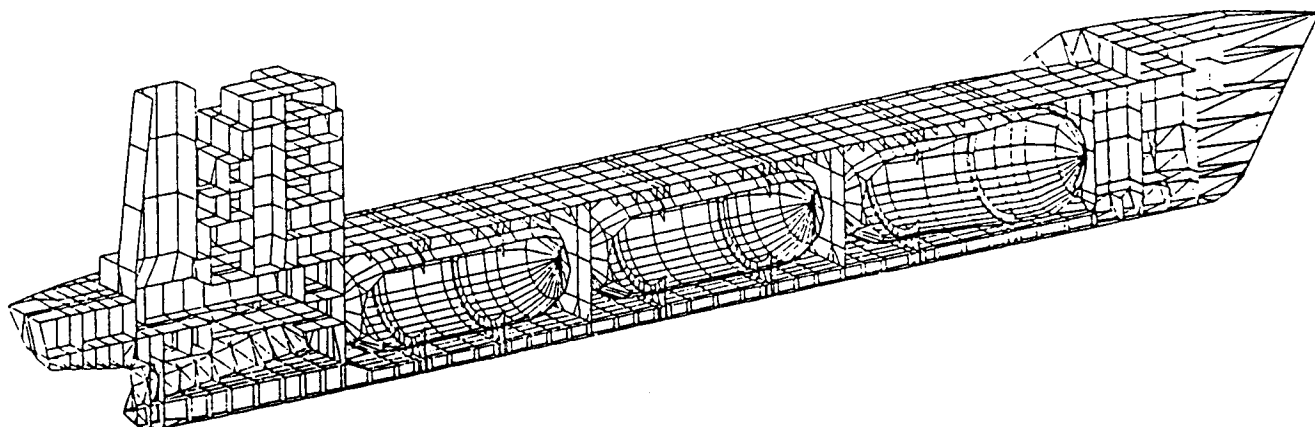
att medverka i den primärt lastbärande strukturen som direkt drag, tryck, eller skjuvbelastade plåtfält eller som 'flänsar' och 'livplåtar' i balkkonstruktioner. I denna funktion är det enbart membranegenskaperna som behöver modelleras!

Vid dimensionering kan den lokala böjningen ur planet ofta separeras från de övergripande strukturegenskaperna. I de flesta övergripande FE-modeller av fartygsstrukturer kan därför plåtar och styrkebärare tillräckligt väl modelleras med membranelement.

Exempel på modeller med membranelement:

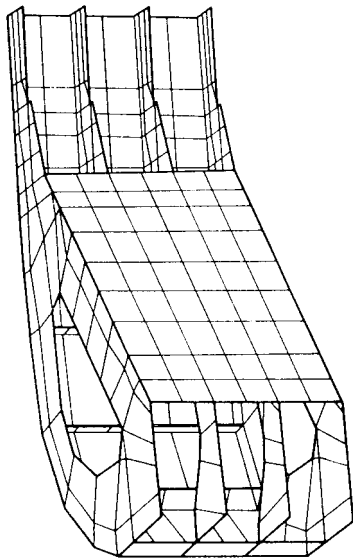
Hela fartygsstrukturer inklusive primärt bärande konstruktionselement:

För att begränsa antalet frihetsgrader görs modellen relativt grov och förstävningar, hål, brickor etc modelleras normalt inte. (Effekten av dessa på den primära styrkan kan man i viss mån ta hänsyn till genom att justera elementens tjocklek).



## Membranelement

Exempel (forts):



Lokal studie av spänningar och deformationer i en hopper-tank i ett bulkfartyg.

Även för lokala - eller 'regionala' - modeller dominerar vanligen de plana egenskaperna. Man måste dock vara medveten om att ju mera i detalj vi studerar en fartygsstruktur, desto större betydelse kan den lokala böjningen ur planet få.

Elementindelningen har stor betydelse vid modellering med skivelement. Om man kan använda CSSR-element är det tillräckligt med ett element för att fullgott representera ett böjliv. Om man använder enklare CST eller LSR element krävs en betydligt tätare elementindelning för att återge böjspänningar, bättre är då att övergå till 6- eller 8-noders element.

Några fördelar med membranelement:



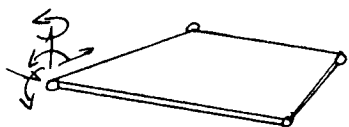
- Ger effektiva modeller av fartygs plåtfält för de flesta typer av analyser, inga onödiga frihetsgrader.
- Lätt att snabbt generera modeller för enkla geometrier. Endast en geometrisk storhet - tjockleken - bestämmer egenskaperna.
- Lätt att visualisera resultaten grafiskt i form av deformerade strukturer, spänningskurvor eller vektorer

Några nackdelar med membranelement:



- För balkliknande konstruktioner krävs betydligt många fler noder och frihetsgrader för att uppnå samma noggrannhet som med balkelement.
- Inga laterala laster kan läggas på membranelement, dvs alla noder som ska bära last måste vara understödda av ett element i lastens riktning. Detta kan leda till onödigt mycket modelleringsarbete för att anpassa lastfallen.

## Generella skalelement



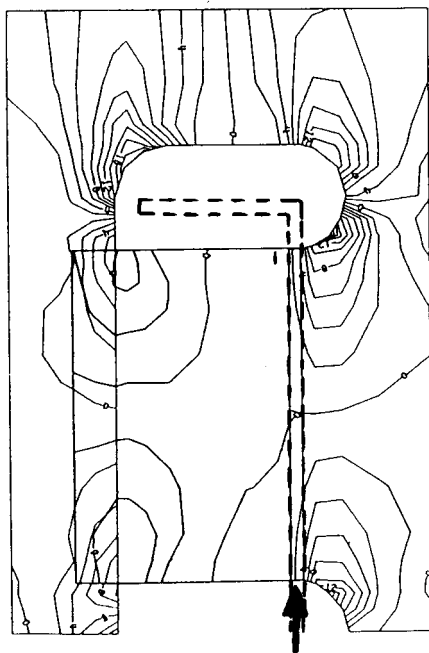
är skivelement som både kan återge plana egenskaper (membranelement) och laterala egenskaper (plattelement) dvs böj deformationer och böjspänningar ur planet.

Skalelement återger således både de lokala och de globala egenskaperna hos en fartygsplåt i skrovstrukturen. Ett generellt skalelement har upp till 6 frihetsgrader i varje nod.

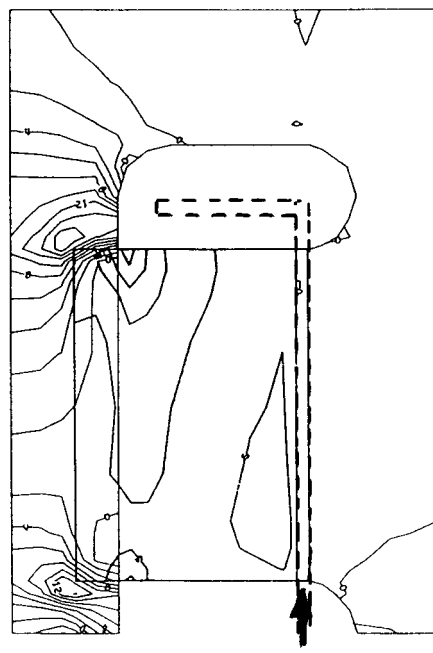
Skalelement bör användas när den lokala böjningen i plåtarna har betydelse, dvs i första hand för lokala studier. Eftersom det går att lägga laterala trycklaster på skalelement kan det vara effektivt att använda dem i stället för membranelement även i mera övergripande studier, enbart pga att lastmodelleringen blir enklare. För att utbøjningen i skalelementen ska bli riktig måste man i så fall också modellera förstävningarna som balkar.

Exempel: Brickan (lug) som sammanbinder en longitudinal med bottenstocken tvärs över longitudinalgenomgången.

Pga att brickan svetsas ovanpå livplåten uppstår betydande lokala böjspänningar i plåtarna även vid 'plan' lastöverföring.



Membranspänningar,  $\sigma_y$ , i livplåt och bricka (lug) vid vertikal lastöverföring från longitudinal till bottenstockens livplåt



Böjspänningar,  $\sigma_y$ , i livplåt och bricka

### Några fördelar med skalelement:

- Kan bära (och överföra) laterala laster dvs simulerar helt egenskaperna hos en vanlig plåt.



liksom för membranelement gäller dessutom:

- Lätt att snabbt generera modeller för enkla geometrier. Endast en geometrisk storhet - tjockleken - bestämmer egenskaperna.
- Lätt att visualisera resultaten grafiskt i form av deformerade strukturer, spänningskurvor eller vektorer

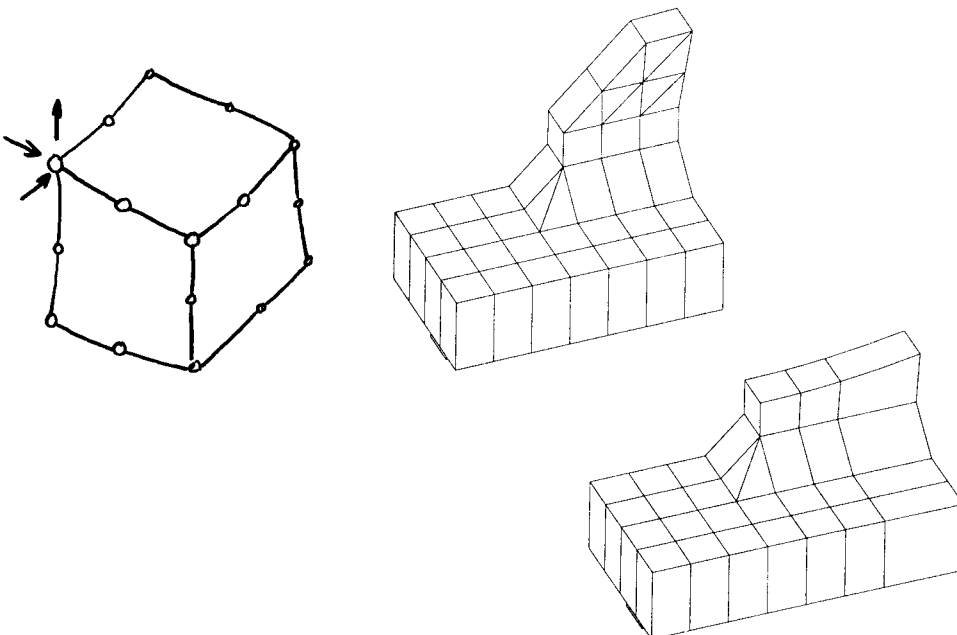
### Några nackdelar med skalelement:



- modellerna leder lätt till ett mycket stort antal frihetsgrader (dubbelt mot membranelement)
- utböjningar ur planet blir helt orealistiska i modellen om skalelementen belastas med lateralt tryck utan att alla förstävningar modelleras.

## Volymselement

kan fullständigt efterlikna 3-dim materialegenskaper. För tunnväggiga skalkonstruktioner som fartyg ger de dock ingen fördel gentemot skalelementen. Kan på forskningsnivå behöva användas för att i detalj undersöka svetsförband etc.



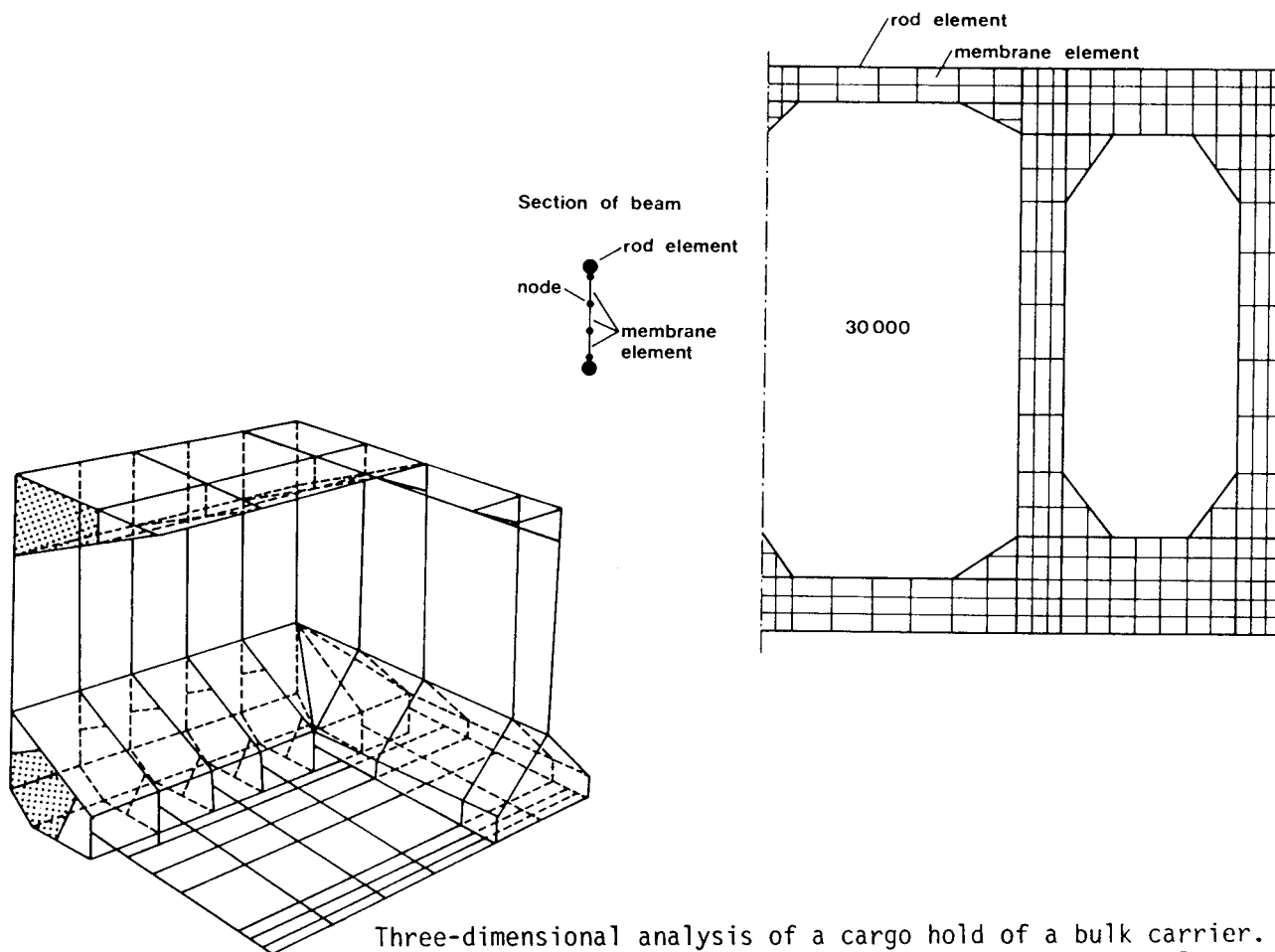


## Modeller med blandade elementtyper

För att så effektivt som möjligt återge en strukturs egenskaper i en FE-modell utnyttjas ofta en blandning av elementtyper. För fartygsskrov är det vanligt att utnyttja membranelement, balkelement och stängelement i samma modell, t ex för att återge plåtfält, spant och förstyvningar. En sådan teknik kräver dock god insikt i hur strukturen kommer att uppföra sig under last. Man måste också vara mycket noggrann med att samma frihetsgrader / styvhet finns representerad i element som ansluter i samma nod.

Generellt bör element i direkt anslutning till varandra vara så lika som möjligt map typ, storlek och styvhet. Detta för att undvika idealiseringsfel och numeriska fel.

Exempel på FE-modeller med blandade element:

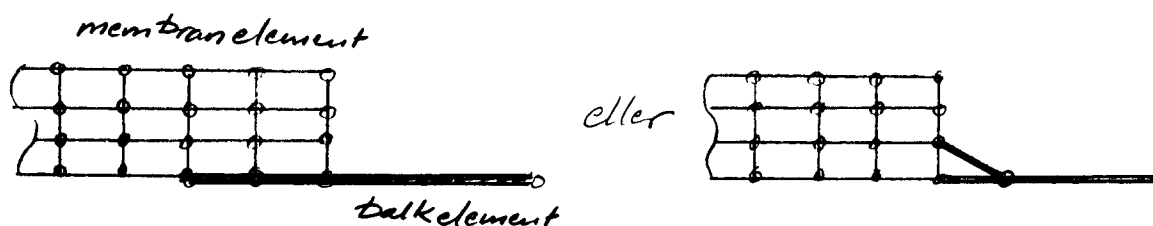


Three-dimensional analysis of a cargo hold of a bulk carrier. Membrane plate elements were used in addition to beam elements for the hopper tank, topside tank, side shell and bulkhead stool. The double bottom was represented by a beam grillage.

## Modellering av laster

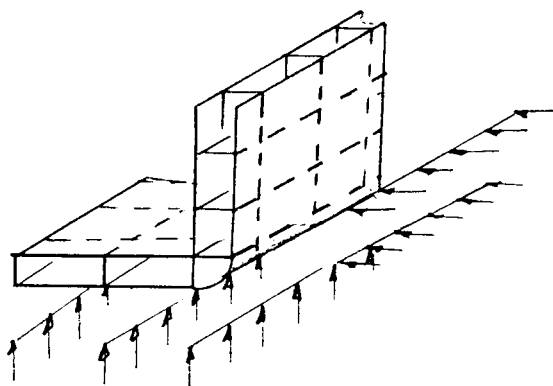
Principen för FEM bygger på att deformationer och krafter bara kan överföras mellan elementen i noderna. I de fall man har utbredda laster över elementen, måste dessa överföras till ekvivalenta nodlaster. I programmen finns normalt rutiner för att göra detta på ett riktigt sätt (formfunktionen!).

Däremot måste man vara medveten om elementens begränsningar vad gäller lastupptagning. T ex kan ett vanligt membranelement inte ta upp moment i planet - enbart nodförskjutningarna ingår som frihetsgrad, inte nodrotationer. En balk kopplad till en membranelementnod blir fritt upplagd och för inte över något moment. Vill man modellera momentinspänning av en balk i en skivstruktur måste man låta balkelementet fortsätta en extra nod in i skivan eller 'förgrena' balken till flera kantnoder.



Den största delen av fartygsskrovet består av förstyvade paneler, lateralt belastade av tryck i någon form (från lasten eller hydrostatiskt tryck från vattnet utanför fartyget).

Som tidigare nämnts kan man väl modellera panelplåtarna som membranelement i 3 dimensioner eftersom de som del av den lastbärande strukturen kommer att utsättas för plana spänningar. De yttre lasterna (trycket) måste då fördelas som linjelaster på bärande balkar i livets plan. En bra återgivning av verkligheten erhålls om lasterna läggs på de förstyvningar som har tätast delning, och via dem får överföras i den korsande strukturen. Om panelen har ungefär samma delning i båda huvudriktningarna bör man fördela lasten både tvärskepps och längskepps.



## Modellering av lastfall - superponering

För linjärt elastiska problem gör egenskaperna i FEM det enkelt (=snabbt på datorn) att lösa ut förskjutningar och spänningar för olika lastfall. Så länge inte randvillkoren eller strukturen förändras, behöver inte ekvationssystemet lösas på nytt för varje lastfall.

Det kan därför vara lämpligt att lösa ut olika lastkomponenter var för sig, t ex ballastfyllda tankar, olika djupgåenden, olika däckslastfördelningar etc. Godtyckliga lastfall kan sedan undersökas genom att superponera resultaten från de olika lastkomponenterna multiplicerade med skalfaktorer. I alla stora FEM program finns möjlighet att spara resultat från olika lastfall och efteråt kombinera dem på önskat sätt.

Om man av något skäl måste begränsa modellens storlek och har en symmetrisk geometri men ett osymmetriskt lastfall, kan man klara sig med att modellera endast halva strukturen och skapa ett godtyckligt lastfall som en summa av ett symmetriskt fall och ett antisymmetriskt. Observera dock att dessa två har olika randvillkor i symmetrisnittet!

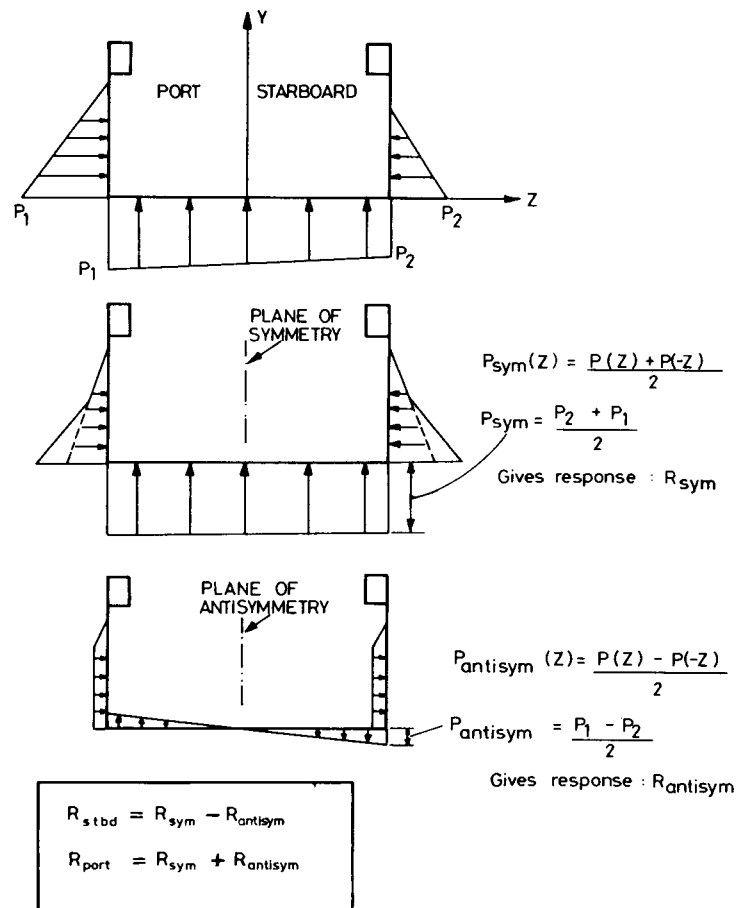
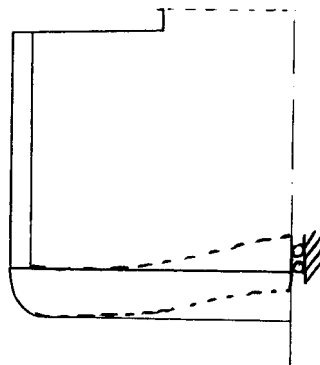


Figure 8.11 Use of symmetric and antisymmetric loads.

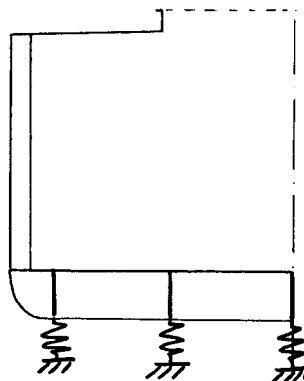
## Randvillkor

används till:

- att förhindra stelkroppsrörelse av strukturen dvs förhindra singularitet i styvhetsmatrisen. (För vibrationsanalys krävs dock inga randvillkor)
- att få beräkningsmodellen att likna den verkliga strukturen
- att minska det modellerade områdets utbredning och därmed modellens storlek (randvillkoren simulerar omgivningens påverkan)



De vanligaste randvillkoren innebär eliminering av frihetsgrader - dvs förhindrande av en eller flera av de tillåtna förskjutningarna i en nod. Sådana randvillkor kan simulera en styv omgivning eller ett lokalt symmetrisnitt.



Fjädrande randvillkor används för att simulera inflytandet från den icke modellerade omgivningens styvhet, och kan vara ett effektivt sätt att minska modellens storlek (t ex när en 3-dim struktur modelleras i 2-dim).

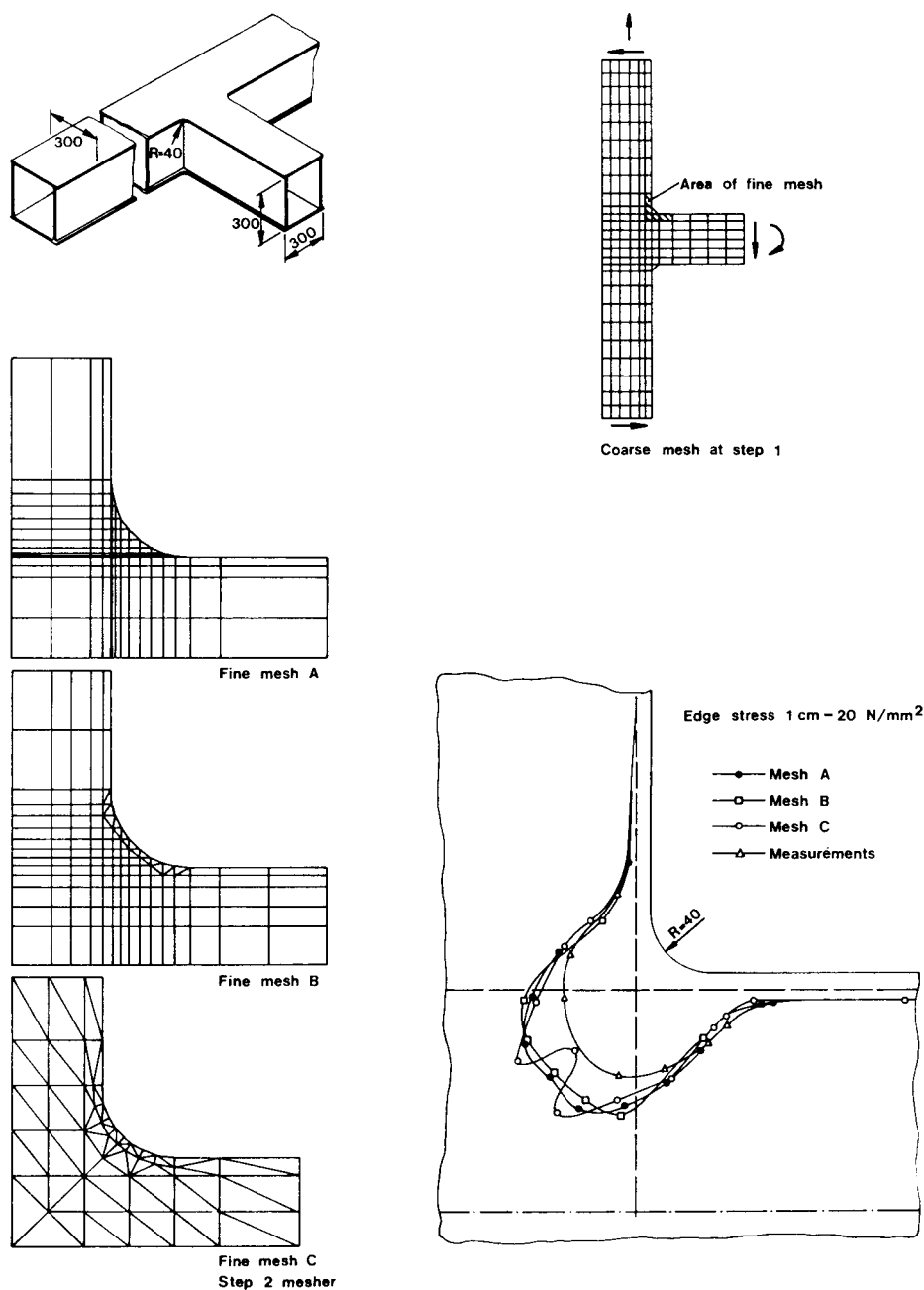
Kopplade frihetsgrader innebär att förskjutningen i en nod (eller frihetsgrad) görs direkt beroende av förskjutningen i en annan del av strukturen. Detta är ett 'känsligt' randvillkor som vid slarvig användning kan ge upphov till stora fel i modellen!

Kopplade frihetsgrader kan t ex användas för att föra över deformationer mellan olika fint indelade delar av modellen, eller för att simulera repeterbarhet i strukturer ('vänstra sidan deformeras lika som högra sidan').

## Randvillkor

Föreskrivna förskjutningar kan användas som ett alternativ till att lägga på laster på modellen, och används ofta för att föra över resultat mellan olika modeller.

T ex kan man utföra en beräkning av globala deformationer i ett fartyg genom en enkel balkmodell utsatt för ett antal olika lastfall. De beräknade deformationerna kan sedan påföras en vevbram modellerad med skivelement för noggrannare analys av t ex området kring slagbrickan. En sådan 2-steps analys bygger på att man antar att det lokala tillståndet inte påverkar det globala.



Two-step calculation of hatch corner

## Elementindelning - konvergens

På samma sätt som val av elementtyp är också val av elementindelning av avgörande betydelse för resultatens noggrannhet - och för modellens kostnad i form av manuellt arbete och i beräkningstid för datorn.

Några viktiga tumregler:

- Strukturens geometri ska återges så riktigt som möjligt. Det är mycket svårt att förutse vad en förenklad geometri får för betydelse på resultaten.
- Elementindelningen ska göras sådan att lasterna på noderna kan återge verkliga laster på ett riktigt sätt
- De vanligaste finita elementen återger normalt deformationer bättre än spänningar. Områden med höga spänningsgradienter måste modelleras med fin elementindelning om man vill kunna utvärdera spänningarna där. (För den hela strukturen kan det däremot vara av liten betydelse vilken elementindelning som görs lokalt).

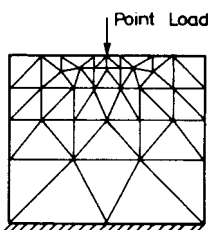
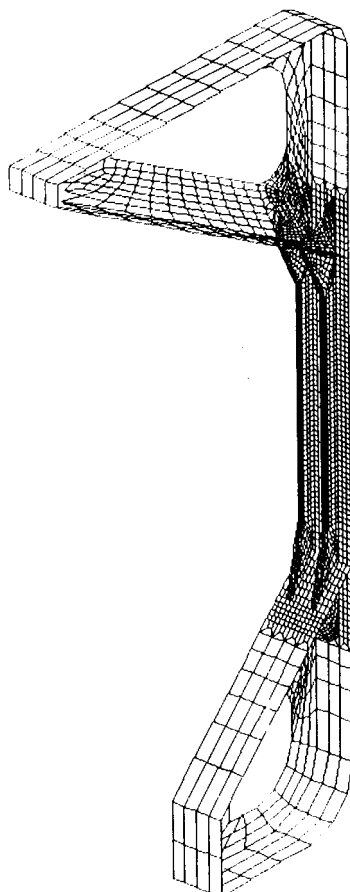


Figure 7.3 Mesh grading.



Ofta leder behoven beskrivna i punkterna ovan till att man vill ha en varierad elementindelning anpassad till varje enskild del av strukturen. En sådan varierande indelning kan bli mycket tidsödande att generera manuellt. Man får vanligen skapa en övergångszon med triangelement mellan olika tätt indelade fyrhörningar.

I en del programsystem finns möjlighet att automatiskt skapa en varierande elementindelning mellan olika ränder. Denna blir då sammansatt av ett helt oregelbundet mönster bestående av triangelement.

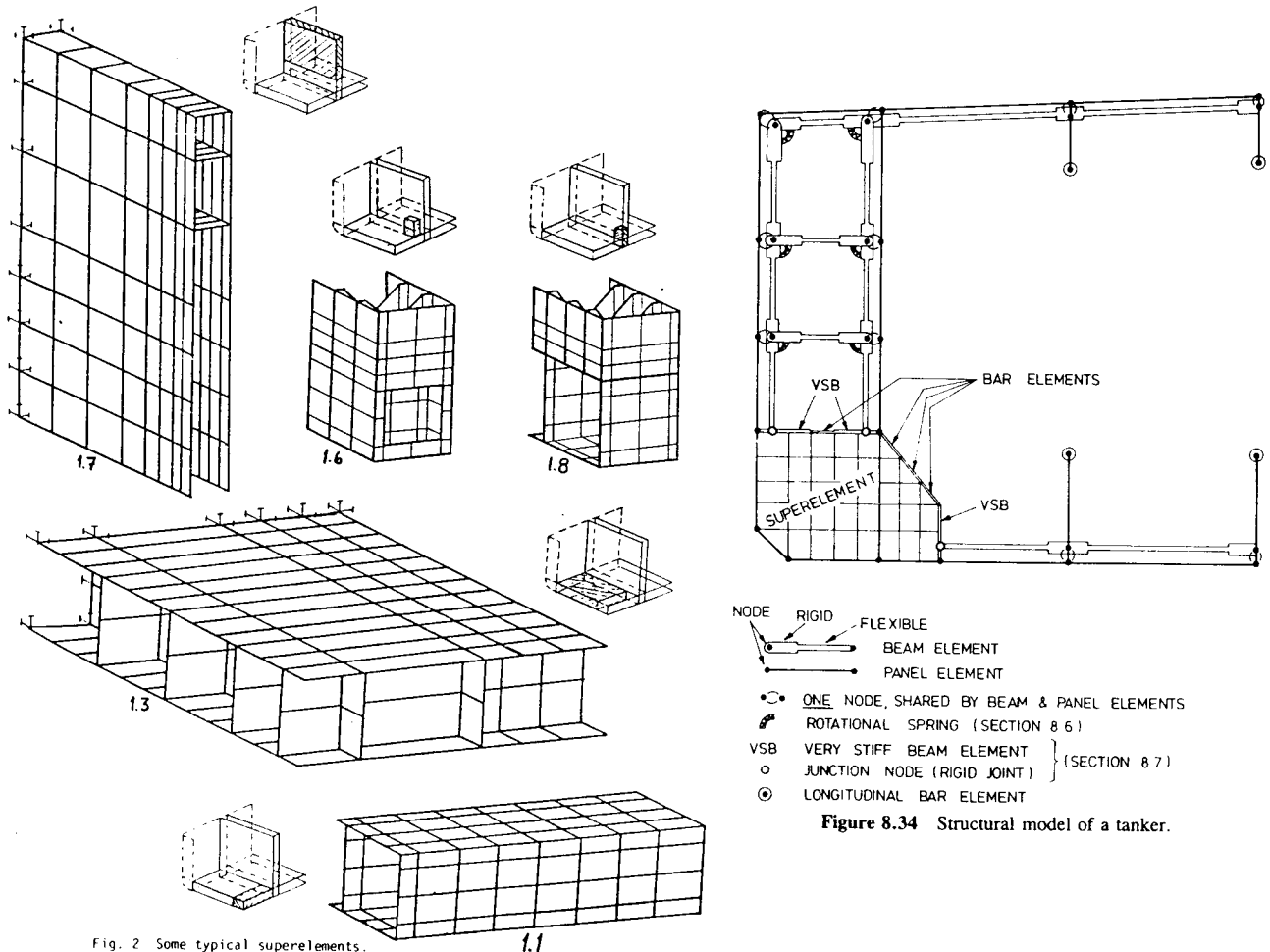
Om man inte kan utnyttja detta är det oftast lönsamt tidsmässigt att i en liten modell, behålla den fina elementindelningen överallt, och i en stor modell utföra analysen i två steg som beskrivits tidigare.

## Substrukturer - superelement

är delstrukturer för vilka man löst ut sambandet mellan krafter och förskjutningar i ett fåtal 'supernoder' (normalt i delstrukturens ränder. Delstrukturerna kan vara hur avancerat modellerade som helst, men deras egenskaper sett från omgivningen sammanfattas i supernoderna.

Med hjälp av superelement - substrukturer kan man bygga upp större modeller utan att behöva lösa alltför stora ekvationssystem. När den stora modellens förskjutningar i supernoderna är beräknade kan man gå tillbaka ner på en lägre nivå och räkna ut deformationer och spänningar inne i superelementet. Det åtgår dock en hel del datortid till att administrera denna typ av nivågrupperad analys och den leder till kortare lösningstider bara om modellen är mycket stor.

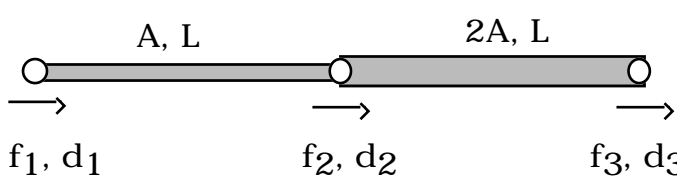
Däremot är det en stor fördel med att arbeta med superelement om modellen innehåller delstrukturer som återkommer på olika ställen, t ex lastrum i fartygsskrovet. De avancerade panelelement som beskrivs i SSD kan anses vara en form av superelement.



## Substrukturer - superelement

Exempel på härledning av ett enkelt superelement:

Vi gör om två stänger med olika tvärsnittsarea till en med för omgivningen helt ekvivalent styvhet:



$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \frac{E \cdot A}{L} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix}$$

kolumnbyte

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \frac{E \cdot A}{L} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_2 \\ \delta_1 \\ \delta_3 \end{pmatrix}$$

radbyte

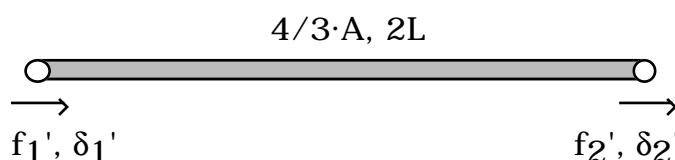
$$\begin{pmatrix} f_2 \\ f_1 \\ f_3 \end{pmatrix} = \frac{E \cdot A}{L} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_2 \\ \delta_1 \\ \delta_3 \end{pmatrix}$$

elimination av kopplingen mellan krafterna  $f_1$ ,  $f_3$  och förskjutningen  $\delta_2$

$$\begin{pmatrix} f_2 \\ f_1 + \left(\frac{f_2}{3}\right) \\ f_3 + \left(2 \cdot \frac{f_2}{3}\right) \end{pmatrix} = \frac{E \cdot A}{L} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_2 \\ \delta_1 \\ \delta_3 \end{pmatrix}$$

"superelementet"

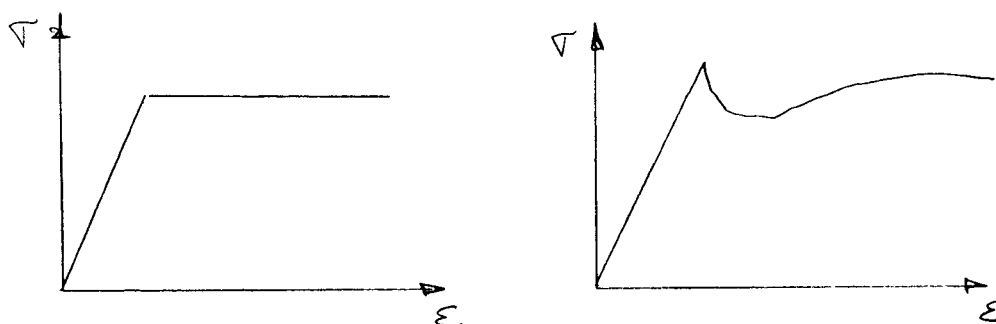
$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 + \left(\frac{f_2}{3}\right) \\ f_3 + \left(2 \cdot \frac{f_2}{3}\right) \end{pmatrix} = \frac{2 \cdot E \cdot A}{3 \cdot L} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta'_1 \\ \delta'_2 \end{pmatrix}$$



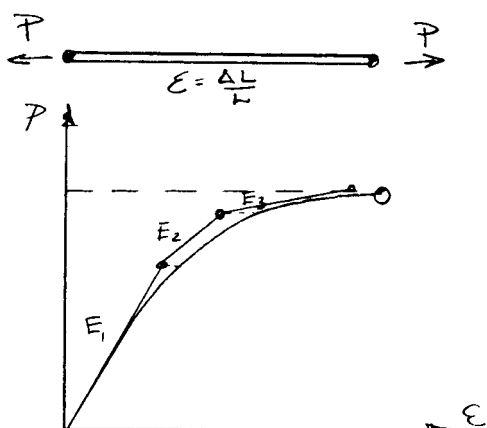


## Statisk icke-linjär analys

Elementen tilldelas ett icke linjärt spännings - töjnings förhållande. Beroende på vilket syfte analysen har kan man välja ett enkelt elastiskt - ideal-plastiskt samband eller ett mera realistiskt samband. I båda fallen blir man tvungen att söka lösningen genom ett upprepat antal analyser där elementegenskaperna förändras (anpassas till deformationerna) i varje steg.

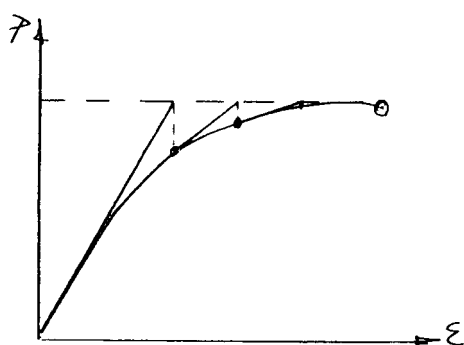


Lösningen kan ske med (principiellt) två olika metoder:



### Stegmetod

Lasten läggs på successivt och elementegenskaperna uppdateras beroende på spännings/töjnings tillståndet efter varje steg.



### Iterativ metod:

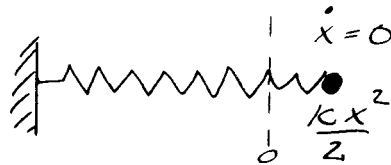
Hela lasten läggs på varefter man identifierar spänningar beroende på den beräknade töjningen med elementens initialegenskaper. Jämvikt med dessa spänningar ger en ny (lägre) yttre kraft, som ökas till hela lasten på nytt (med nya elementegenskaper) vilket ger nya töjningar osv.

I praktiken blir icke-linjära beräkningar komplicerade och svårtolkade för större strukturer, och används i huvudsak för forskningsändamål.

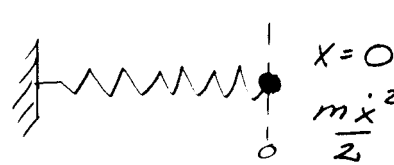
## Vibrationsanalys

Ett vibrerande odämpat system växlar mellan två energiformer:

töjningsenergi



kinematisk energi



Töjningsenergin beror på strukturens geometri och elasticitet

Kinematiska energin beror på geometri och massfördelning

Kraftjämvikten mellan tröghetskrafter och elastiska krafter (utan yttre last) bestämmer egenfrekvenserna hos systemet:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\Delta}(t) + \mathbf{K} \cdot \Delta(t) = 0$$

med  $\Delta(t) = \Delta \cdot \sin(\omega t)$  erhålls  $(-\omega^2 \cdot \mathbf{M} + \mathbf{K}) \cdot \Delta = 0$

icke-trivial lösningar kräver  $\det(-\omega^2 \cdot \mathbf{M} + \mathbf{K}) = 0$

Detta är ett egenvärdesproblem där egenfrekvensen  $\omega$  löses ur egenvärdena och motsvarande förskjutningsformer  $\Delta$  löses ur egenvektorerna.

Med dämpning och yttre tidsvarierande last blir motsvarande ekvation:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\Delta}(t) + \mathbf{C} \cdot \dot{\Delta}(t) + \mathbf{K} \cdot \Delta(t) = \mathbf{F}(t)$$

om den yttre lasten  $\mathbf{F}$  är periodisk och  $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$  är konstanta matriser oberoende av  $\Delta(t)$  och dess tidsderivator kan lösningen erhållas genom att beskriva lasten som en summa harmoniska komponenter och superponera de beräknade svängningarna för varje komponent.

Några viktiga punkter att ta hänsyn till vid vibrationsanalys:

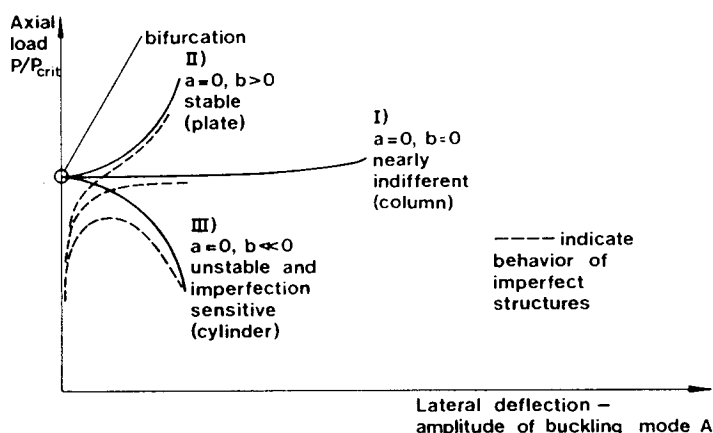
- FE-modellen måste representera både styvhet och massfördelning på ett riktigt sätt.
- Modellen ska vara tillräckligt fin för att kunna beskriva utböjningsformen vid den högsta intressanta frekvensen
- Om massfördelningen beskrivs av punktmassor måste det finnas flera sådana mellan varje nod i utböjningsformen

## Stabilitetsanalys

Stabilitetsanalys av strukturer innefattar två olika typer av lösningar:

- Beräkning av bifurkationslast och bifurkationsform (linjärt)
- Beräkning av spänningar och deformationer efter buckling eller knäckning, (icke-linjärt)

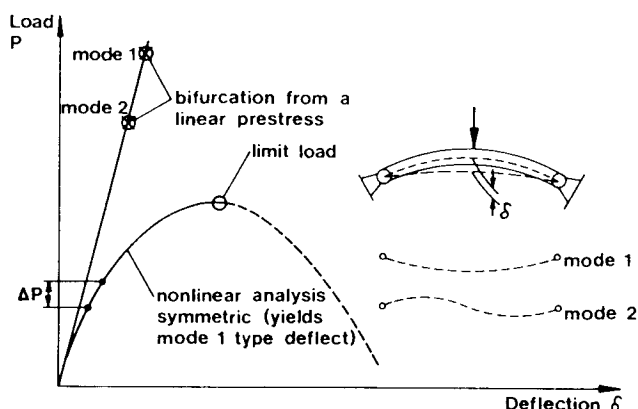
Den första typen av analys blir en form av egenvärdesproblem på samma sätt som beräkningen av egenfrekvenser i vibrationsanalysen. Man söker här energijämvikt mellan olika typer av utböjningsformer - moder, varav man vanligen bara är intresserad av de med lägst yttre kraft.



Bifurkationslasten svarar inte direkt mot gränslasten.

För stöttor kan det vara ungefär de största last som kan bäras, medan för plåtfält, gränslasten kan vara 2 - 5 ggr större än bifurkationslasten.

Vid icke-linjärt beteende, måste den kritiska lasten beräknas med stegvis påförande av last. Modellen ges vissa initialdeformationer (eller laterala laster) så att rätt utböjningsform erhålls.



Deformationerna blir i dessa fall ofta så stora att speciella element med icke-linjära geometriska egenskaper måste användas

Icke-linjär stabilitetsanalys kräver mycket arbete och datortid, och är långt ifrån någon standardmetod. Resultaten blir mycket känsliga för hur man modellerat initialtillståndet med geometriska defekter, egenspanningstillstånd etc.

## Något om datorteknik för FEM

Ett FEM-program är vanligen uppbyggt av tre moduler:  
Preprocessor - Huvudprogram - Postprocessor

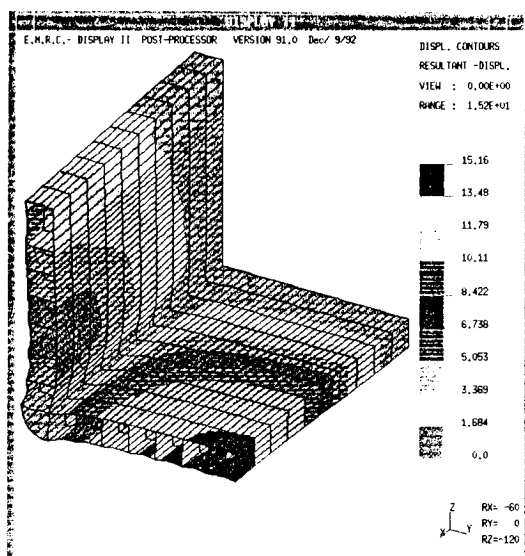
Preprocessorn används för att generera modellen 'på skärmen' och lagra data på en eller flera filer som läses av huvudprogrammet. Preprocessorn kan innehålla olika geometriska hjälpmedel som t ex:

- Skapande av punkter, linjer, ytor, volymer som används för att generera finita element
- Möjlighet att skala, kopiera, flytta, rotera, spegla geometrin (eller redan genererade element och noder)
- Möjlighet att läsa in geometriska data från CAD-system
- Inmatning av materialdata, elementegenskaper, lastfall, randvillkor etc

Huvudprogrammet läser in modellens topologi och egenskaper från tidigare genererade filer, löser ekvationssystemet och lagrar resultaten i utdatafiler. Huvudprogrammet innehåller följande delar (linjär-elastisk analys)

- Assemblering av styvhetsmatris, (inkl omnumrering av frihetsgrader för att minska matrisens bandbredd)
- Lösning av ekvationssystemet
- Beräkning av förskjutningar, spänningar och reaktionskrafter i elementen och noderna för de olika lastfallen (*retrack*).

Vanligen finns möjlighet att stanna efter första delen för att kontrollera att modellen är riktig och lösbar (*datacheck*). Resultaten efter den andra delen brukar också kunna sparas för att användas senare för nya lastfall.



Postprocessorn läser in de tabellerade resultaten från huvudprogrammet och presenterar dem grafiskt eller i selektiva listor för enskilda element. Postprocessorn behöver ungefär samma faciliteter som preprocessorn, vilket gör att dessa två ofta är samma grundprogram och det enda interface som användaren ser.

## Något om bandbredd och lösningstider

Den övervägande delen av tiden som åtgår för en vanlig FEM-analys är manuellt modelleringsarbete!

För stora modeller kan dessutom datortiden för lösning av problemet bli kritisk. Lösningen av ekvationssystemet sker genom triangulering följt av tillbakasubstitution för varje lastfall.

Den totala lösningstiden kan i allmänhet skrivas:

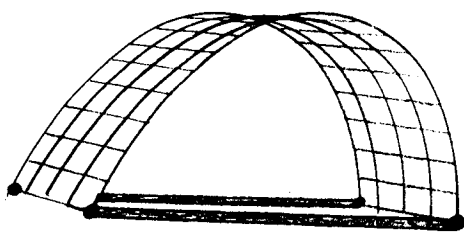
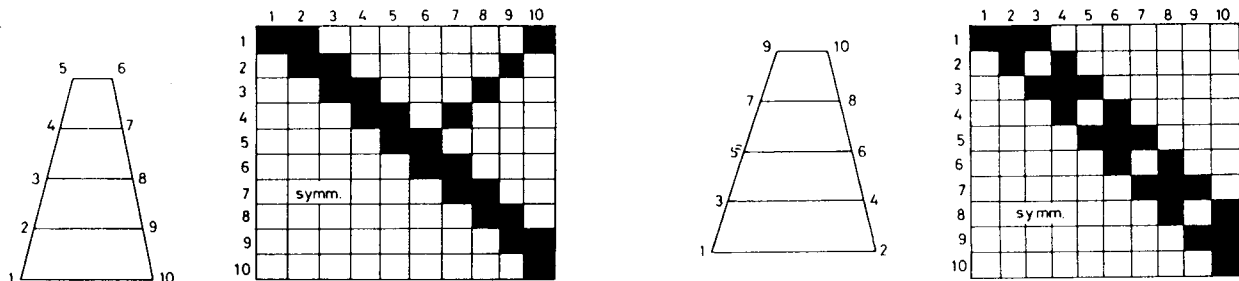
$$T_{\text{tot}} = \alpha \cdot n \cdot w_b^2 + \beta \cdot n \cdot w_b \cdot L$$

där  $\alpha$  och  $\beta$  är konstanter (delvis programmerberoende),  $n$  är antalet frihetsgrader,  $w_b$  är ett mått på bandbredden och  $L$  är antalet lastfall.

Den första termen blir vanligen helt dominerande.

Bandbredden är den största skillnaden i numrering mellan två frihetsgrader sammanbundna med ett element, + 1. Genom en 'osmart' numrering kan man således helt i onödan skapa kopplingstermer i styvhetsmatrisen som kraftigt ökar bandbredden.

Se de schematiska exemplen på balkmodellerna ur SSD:



*Stängerna ökar  
max. bandbredden  
dramatiskt!*

Den optimala numreringen kan normalt beskrivas av en vågfront som sköljer in över modellens smalaste utbredning (i noder räknat). I de flesta FEM-program finns rutiner som kan omnumrera frihetsgraderna så att bandbredden minimeras, eller andra metoder att rekonditionera styvhetsmatrisen eller minska lösningstiderna. Som användare märker man inget av detta, men är man inte medveten om problemet kan man göra stora misstag vid generering av element som knyter ihop helt olika delar av en struktur.

## Felkällor vid FEM-analys

De huvudsakliga felkällorna vid FEM-analys kan sägas vara:

- Idealiseringsfel, strukturen uppträder på ett annat sätt än det jag tänkt mig, fel randvillkor, fel delstudie, fel lastfall etc.
- Modellerings - Diskretiseringsfel, fel elementtyper har använts, för grov indelning för att kunna återge kritiska spänningar, förenklad återgivning av den verkliga geometrin etc
- Numeriska fel, singular styvhetsmatris, otillräckliga randvillkor, avrundningsfel eller trunkationsfel pga stora skillnader i styvhet mellan närliggande element, 'buggar' i programmet etc.

De numeriska felen leder oftast till avbrott vilket gör att de inte är farliga, men de kan vara mycket tidsödande att komma tillrätta med.

I 99% av fallen är det idealiserings/modelleringsfel som leder till problemen och inte fel i programmet!

Modellerings - diskretiseringsfel kan vara kritiska, man bör alltid göra en bedömning av elementens egenskaper och elementindelningen i förhållande till de resultat man önskar. Ett sätt att göra detta på är att analysera ett mycket enkelt lastfall som man kan följa upp resultaten från. Ett annat sätt är att utföra en enkel konvergensstudie, dvs ändra elementindelning resp. elementtyp i någon känslig del av modellen och undersöka hur resultaten förändras.

Idealiseringsfelen slutligen, är egentligen ingen FEM-problem utan ett generellt problem - att förstå de grundläggande egenskaperna hos strukturen som lastbärare.

För analys av fartygsskrov är det verkligt stora problemet att idealisera en mycket komplicerad, stokastisk, sammansatt lokal-global resp statisk-dynamisk lasthistoria som en handfull enkla kvasi-statiska lastfall för dimensionering. Erfarenheten från tidigare studier och från fartyg i drift utgör här ett nödvändigt komplement för att kunna bedöma resultaten. Klassningssällskapen fungerar både som rådgivare och kontrollant vid denna typ av beräkningar.3

## Checklista inför en FEM-analys

ur Stiftelsen Svensk Skeppsforskning (SSF) report 145, 1978  
'Finite element modelling of ship structures' 1.Handbook

Key-word	Comments
Purpose	The whole modelling work depends upon the purpose. Be sure that the purpose of the analysis also is clear to the users of the results.
Mesh size	Depends mainly upon the type of analysis and accuracy required: <ul style="list-style-type: none"> <li>- detailed stress analysis = fine mesh</li> <li>- stress level analysis = medium mesh</li> <li>- displacement analysis = medium mesh</li> <li>- global vibration analysis = coarse mesh</li> </ul> Quality of elements may influence the choice. The mesh must give a realistic description of the geometry and loads. See section 3.5
Extent of model	Guided by: <ul style="list-style-type: none"> <li>- area of interest</li> <li>- influence from boundary conditions</li> <li>- non-symmetric/irregular structure</li> <li>- non-symmetric loads</li> <li>- cost-frames/times</li> </ul>
Type of elements	<ul style="list-style-type: none"> <li>- beam elements only (frame model)</li> <li>- membrane elements, i.e. neglecting the bending of plates</li> <li>- plate bending or shell elements when bending stresses are of interest and/or pressure is to be applied on the element surface</li> <li>- solid elements</li> <li>- mixing of different types of elements. This must be used with caution. If the elements or modelling are not suited for mixing, erroneous results will occur.</li> </ul>

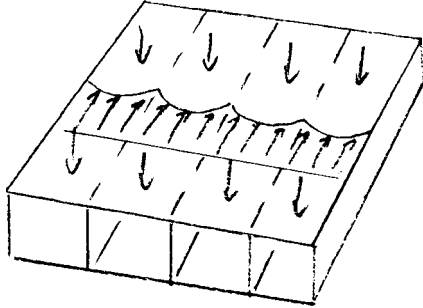
### Checklista inför en FEM-analys (forts)

Key-word	Comments
Load cases	<p>Include</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- all loadcases of interest, but try to keep the total number as low as possible</li> <li>- one check-load in order to control the overall response of the model.</li> </ul> <p>Consider the possibilities for splitting one complex loadcase into elementary loadcases. The FE- model must be able to represent the planned loadcase, e.g. high gradients in temperature distributions.</p>
Load application	<p>Apply loads realistically.</p> <p>Check the chosen type of element to find how loads may be applied and how these are used in the element:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- distributed forces</li> <li>- discrete nodal forces</li> </ul>
Boundary conditions	<p>Must prevent rigid body motion in stress analysis.</p> <p>For vibration analysis, the model may be completely free (for vibration analysis of a complete hull, this is a requirement). If not physical, the boundary conditions must be applied some distance from the area of primary interest. Check if singularity may occur.</p>
Documentation	<p>For each step mentioned above, make documentation of what has been done and decisions taken.</p> <p>Final report should contain data from each key-word above.</p>
Time	<p>Establish time schedule which account for delay due to, for instance:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- modelling errors</li> <li>- change in structure</li> <li>- lack of data for preparation of all input</li> <li>- trouble with program</li> </ul>



## Dimensionering av plåtfält i fartygsstrukturer

sker mot två principiellt skilda funktioner



- plåtfält som delar av primärt eller sekundärt bärande balkar och förstävningar.
- plåtfält lokalt belastade av laterala tryck.

I den första funktionen blir plåtfälten belastade med drag- eller tryckspänningar (för flänsar) resp böj- och skjuvspänningar (för livplåtar). Dessa 'nominella' spänningar kan beräknas med ordinära balkmetoder.

Hållfasthetskriteria för denna typ av belastning är normalt:

- att spänningsnivån med tillräcklig säkerhetsmarginal ska understiga sträckgränsen
- att tryckspänningarna ska understiga den kritiska bucklingsspänningen för plåtfältet.

Vi kommer i detta avsnitt att studera bucklingskriteriet. Först dock några ord om den andra belastningstypen, nämligen:

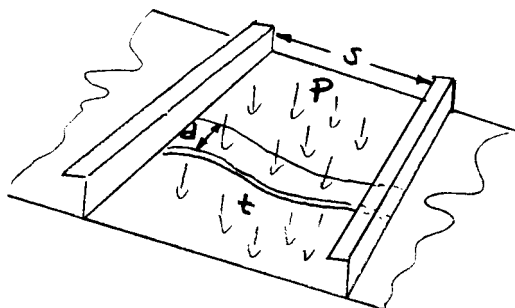
### Plåtfält lokalt belastade av laterala tryck

Alla plåtfält som utgör delar av fartygets bordläggning, avgränsar interna tankar eller utgör delar i ett lastdäck måste dimensioneras för den lokala laterala lasten. Då det lokala plåtfältet utgör en liten del av en panel kan man vanligen betrakta plåtfältet som fast inspänt i ränderna (förstävningarna) som följd av ett symmetriskt lastfall. Vidare gäller att rändernas/förstävningarnas utböjning normalt är mycket liten jämfört med plåtens lokala utböjning.

De största plåtböjningarna uppträder vid plåtfältets långsidor med spänningsriktningen vinkelrätt mot sidan. Om plåtfältet har ett längd/bredd förhållande över 2 kommer utböjningen kring mitten av fältet att bli konstant och opåverkad av kortsidorna. Man kan enkelt härleda ett samband mellan spänningar och tryck genom att betrakta en liten strimla av plåten som en individuellt bärande balk.

## Plåtfält lokalt belastade av laterala tryck

Betrakta en plåtstrimla med tvärsnittsarean  $d \cdot t$  och längden  $s$  (Plåtstrimlan antas ligga på ett avstånd  $> s$  från kortsidorna).



Böjmotståndet blir:

$$W = \frac{I}{\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{d \cdot t^3 \cdot \frac{2}{12}}{t} = \frac{d \cdot t^2}{6}$$

och böjmomentet vid den inspända randen:

$$M = \frac{q \cdot s^2}{12} = \frac{p \cdot d \cdot s^2}{12}$$

vilket ger maxspänningar:

$$\sigma_{\text{insp}} = \frac{M}{W} = \frac{p \cdot d \cdot s^2}{12} \cdot \frac{6}{d \cdot t^2} = \frac{1}{2} \cdot p \cdot \frac{s^2}{t^2} \quad \sigma_{\text{mitt}} = \frac{1}{4} \cdot p \cdot \frac{s^2}{t^2}$$

Som dimensioneringsformel för krav på plåtens tjocklek:

$$t \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{\sigma_{\text{insp}}}} \cdot s \quad \text{eller} \quad t \geq \frac{1}{\sqrt{4}} \cdot \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{\sigma_{\text{mitt}}}} \cdot s$$

ex. ur DNV

### C. Plating and Stiffeners.

#### C 100 Side plating, general.

101 The thickness requirement corresponding to lateral pressure is given by:

$$t = \frac{15,8 s \sqrt{p}}{\sqrt{\sigma}} + t_k \quad (\text{mm})$$

$p$  =  $p_1 - p_8$ , whichever is relevant, as given in Table B1.  
 $\sigma$  =  $140 f_1$  for longitudinally stiffened side plating at neutral axis, within 0,4L amidship.  
 =  $120 f_1$  for transversely stiffened side plating at neutral axis, within 0,4L amidship.

Vi känner igen motsvarande uttryck från klassreglerna. I t ex DNV's regler används överallt följande uttryck

$$t \geq 15,8 \cdot \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{\sigma_{\text{till}}}} \cdot s$$

$t$  (mm),  
 $p$  (kPa)  
 $\sigma$  (MPa)  
 $s$  (m)

Skriver vi om till SI-grundenheter erhålls:

$$t \cdot 10^3 \geq 15,8 \cdot \frac{\sqrt{p \cdot 10^{-3}}}{\sqrt{\sigma_{\text{till}} \cdot 10^{-6}}} \cdot s \quad \text{vilket ger} \quad t \geq \frac{1}{\sqrt{4}} \cdot \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{\sigma_{\text{till}}}} \cdot s$$

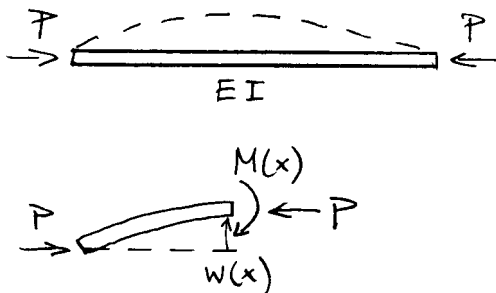
Vi ser att DNV's tillåtna spänningsnivå refererar till plåtens mitt och inte till den högsta spänningen vid infästningen!

## Dimensionering mot Buckling

Buckling och knäckning är stabilitetsproblem där utböjningen inte ökar linjärt med lasten utan kan öka mycket hastigt när lasten överskrider ett visst kritiskt värde.

Under idealiserade antaganden kan man teoretiskt härleda en exakt elastisk bucklings/knäckningsspänning vid vilken utböjningsformen momentant övergår från att ske i det belastade planet till att ske ur planet (Euler-buckling). Övergången till en ny utböjningsform kallas bifurkation.

Låt oss titta på jämviktsekvationen för utböjningen av en stötta under axiell belastning:



Jämvikt i utböjd mod ger

$$M(x) = P \cdot w(x)$$

med elastiska linjens ekvation

$$M(x) = -E \cdot I \cdot w''(x)$$

erhålls differentialekvationen:

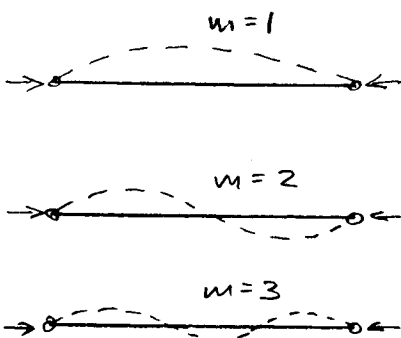
$$w''(x) + \frac{P}{EI} \cdot w(x) = 0$$

med en allmän lösning av typen:

$$w(x) = A \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot x\right) + B \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot x\right)$$

Utböjningens storlek kan vi aldrig bestämma ur lösningen, däremot kan vi med hjälp av randvillkor fastställa utböjningsformen och vilken last P som krävs för varje form (egenvärdet).

För t ex en stötta ledad i ändpunkterna med  $w(0)=w(L)=0$  blir



$$B=0 \quad A \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot L\right) = 0$$

vilket ger knäckkraften

$$P = m^2 \cdot \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2} \quad m = 1, 2, \dots$$

m anger här antalet sinushalvvågor i utböjningen. Den lägsta knäckningskraften  $P_E$  gäller för den första moden ( $m=1$ ).

## Knäckspänning

Motsvarande knäckningsspänning  $\sigma_E = P_E/A$  för stöttan blir:

$$\sigma_E = \frac{\pi^2 \cdot E}{\left(\frac{L_e}{\rho}\right)^2} \quad \rho = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$$

(SSD 11.1.2)

där  $\rho$  betecknar tvärsnittets minsta tröghetsradie och förhållandet  $(L_e/\rho)$  'slankheten'. ( $L_e$  anger här en ekvivalent 'fri' knäcklängd som kan definieras för olika inspänningar och randvillkor)

I verkliga axiellt belastade balkar kommer utböjningen inte att ske plötsligt utan succesivt pga egenspänningar, excentriciteter och kombinerade böjmoment. Det innebär också att för höga knäckspänningar kommer lokal plasticering att ske före 'utknäckning', vilket kommer att reducera den kritiska spänningen vid kollaps. Elasticitetsmodulen i uttrycket ovan måste då ersättas med den verkliga tangenten till spännings-töjningskurvan (benämnd  $E_t$  i SSD).

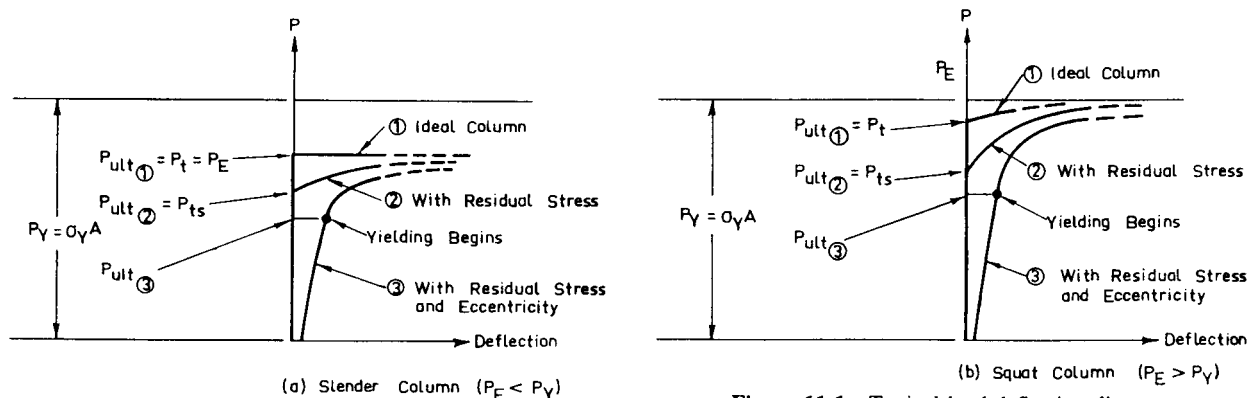


Figure 11.1 Typical load deflection diagrams.

$$(\sigma_{ult})_{ideal} = \frac{\pi^2 E_t}{\left(\frac{L_e}{\rho}\right)^2} \quad (11.1.3)$$

## Korrektion för plastisk knäckning/buckling

Den ideala sk Euler knäckspänningen gäller endast för höga slankhetstal (dvs låga spänningar).

Då  $\sigma_E$  överskrider proportionalitetsgränsen blir den verkliga kritiska spänningen lägre.

En vanligt använd approximativ korrektion för plasticering utgörs av den sk 'Johnson-parabeln' (Johnson-Ostenfelds korrektion). Proportionalitetsgränsen är här antagen vara lika med halva sträckgränsen. Över detta värde korrigeras den ideala elastiska bucklingsspänningen  $\sigma_E$  enligt:

$$\frac{\sigma_{ult}}{\sigma_Y} = 1 - \frac{\sigma_Y}{4 \cdot \sigma_E} \quad \text{då} \quad \sigma_E > \frac{\sigma_Y}{2}$$

Korrektionen är ursprungligen framtagen för uppskattning av knäckspänningen för valsade profiler men används även för korrektion av andra elastiska knäckningsfall och för buckling av plåtfält. Vid sammansatta belastningsfall görs korrektionen med avseende på jämförelsespänningen (von Mises).

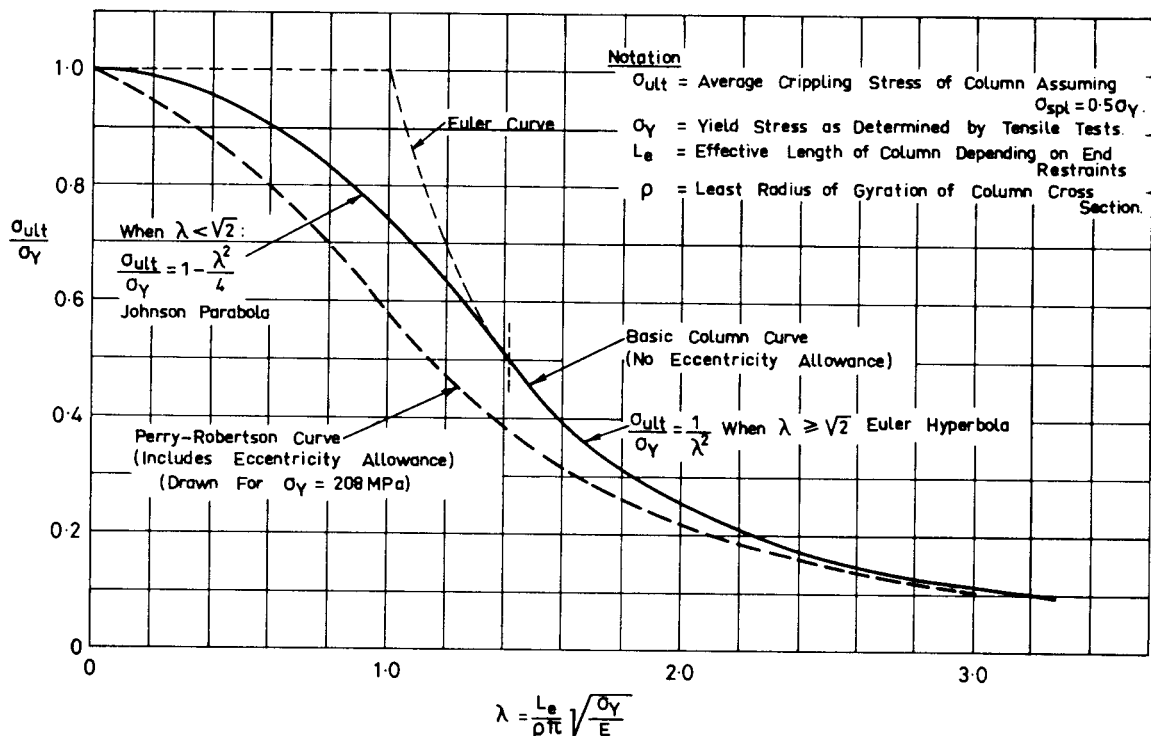
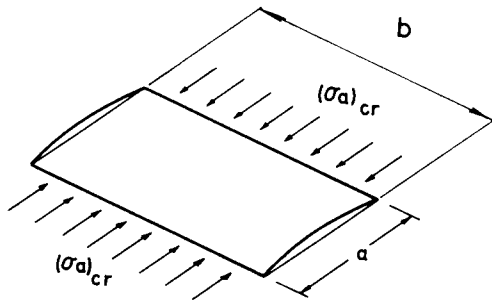


Figure 11.5 Basic column curve (Johnson parabola) and Perry-Robertson curve.

## Buckling av enkla plåtfält

För buckling av ett plåtfält under konstant axiell spänning med de obelastade sidorna helt fria gäller Eulers bucklingsformel med balkstyvheten  $E I$  ersatt med motsvarande plåtstyvhet  $D$



$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 D}{a^2 t} = \frac{\pi^2 E}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{t}{a}\right)^2 \quad (12.1.1)$$

Figure 12.1 Buckling of wide column.

För en plåt med alla sidor fritt upplagda kan den elastiska bucklingsspänningen härledas ur den allmänna plattekvationen

$$\nabla^4 w = \frac{1}{D} \left( p + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (9.2.1)$$

Randvillkoren

$$N_x = -\sigma_a \cdot t \quad N_y = N_{xy} = p = 0$$

ger

$$\nabla^4 w = -\frac{\sigma_a t}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (12.1.2)$$

Utböjningsformen kan skrivas

$$w = \sum_m \sum_n w_{mn} = \sum_m \sum_n C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

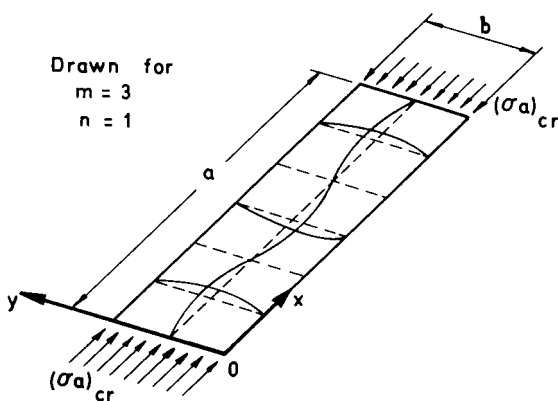


Figure 12.2 Buckled shape of a long plate.

Insatt i ekvationen ovan (eller härlett ur energisamband enl SSD), kan man lösa ut den kritiska bucklingsspänningen:

Där  $m$  är antalet halvsinusbucklor längs

belastningsriktningen och  $n$  antal bucklor tvärs

$$(\sigma_a)_{cr} = \frac{\pi^2 a^2 D \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}{tm^2}$$

belastningsriktningen.

Uttrycket gäller för godtyckliga bucklingsformer, men den lägsta kritiska spänningen erhålls alltid för  $n = 1$ .

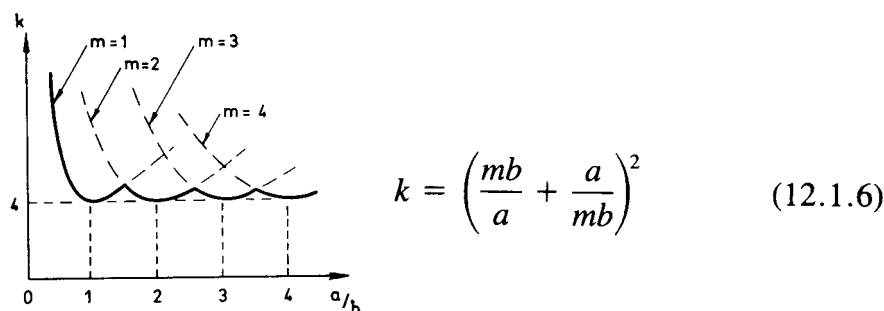
## Bucklingskoefficienten $k$ ( $K$ , $\bar{k}$ och $\bar{K}$ ) (även benämnd plåtfaktorn)

Den ideala kritiska bucklingsspänningen uttrycks ofta:

$$(\sigma_a)_{cr} = k \frac{\pi^2 D}{b^2 t} \quad (12.1.5)$$

där  $k$  är en koefficient som beror av dimensionsförhållanden, randvillkor och belastningstyp.

För en fritt upplagd, jämnt axiellt belastad plåt med  $n=1$  blir enligt föregående sida:



En alternativ formulering som används i många diagram i SSD är den sk *design formula*:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_a)_{cr} &= KE \left( \frac{t}{b} \right)^2 \\ K &= \frac{\pi^2 k}{12(1 - \nu^2)} \end{aligned} \right\} \quad (12.1.7)$$

För vanligt stål är  $K = 0.90 \cdot k$ .

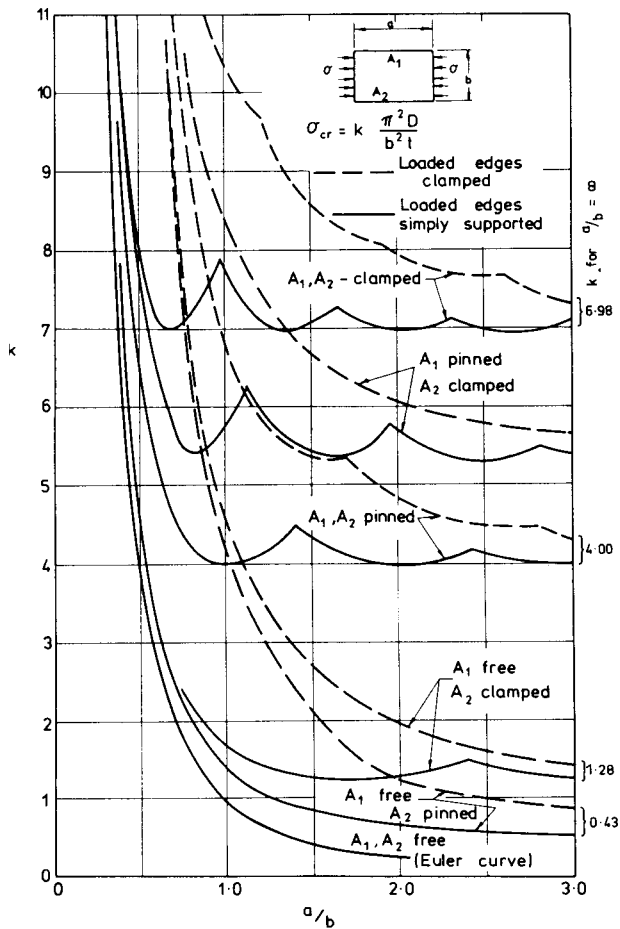
För breda plåtfält  $a/b < 1$ , ( $m=n=1$ ), förekommer även en omvänd formulering för  $k$  och  $K$ . enligt:

$$(\sigma_a)_{cr} = \bar{k} \frac{\pi^2 D}{a^2 t} \quad (12.1.11)$$

Där relationen mellan de båda alternativa koefficienterna ges av

$$\bar{k} = \left( \frac{a}{b} \right)^2 k \quad (12.1.12)$$

## Bucklingsdiagram



**Figure 12.5a** Buckling stress coefficient  $k$  for flat plates in uniaxial compression.

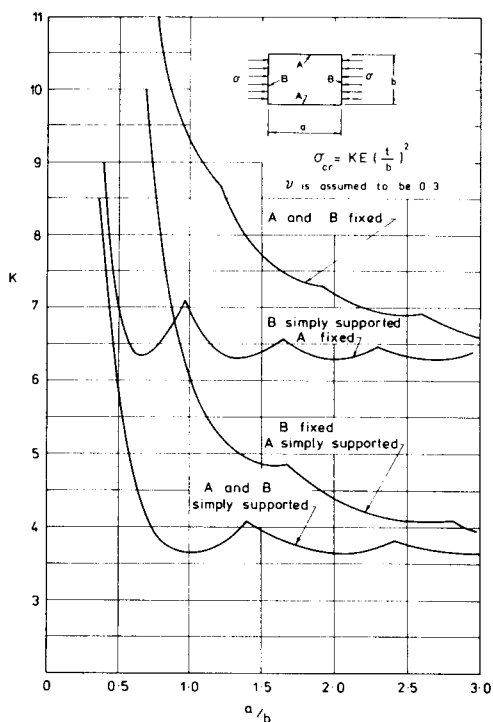
I figurerna här bredvid visas typiska exempel på ett diagram för bucklingskoefficienten.

Exemplen visar inflytande från olika randvillkor och  $a/b$  förhållanden.

Det 'taggiga' utseendet i kurvorna kommer av att den kritiska bucklingsformen växlar med plåtens längd/bredd- förhållande.

För långsmala plåtfält ( $a/b > 3$ ) konvergerar  $k$ -värdet mot en konstant. Det framgår också att inflytandet från kortsidornas inspänning i detta fall blir mycket litet.

Fig.12.5.a visar  $k$ -värden och Fig.12.5.b visar  $K$ -värden ( $0.9k$ )



**Figure 12.5b** Buckling coefficient  $k$  in the design formula for flat plates in uniaxial compression.

**OBS ALLTID FÖR DE OLIKA DIAGRAMMEN I SSD VILKEN K-DEFINITION SOM GÄLLER!**



## Linjärt fördelad axialbelastning

För linjärt varierande axiella spänningar (t ex vid kombinerat lokala böjspänningar och överlagrade globala tryckspänningar i däckstrimlor eller bottenvägare) kan man använda ett enkelt approximativt uttryck för bucklingskoefficienten vid fritt upplagda sidor

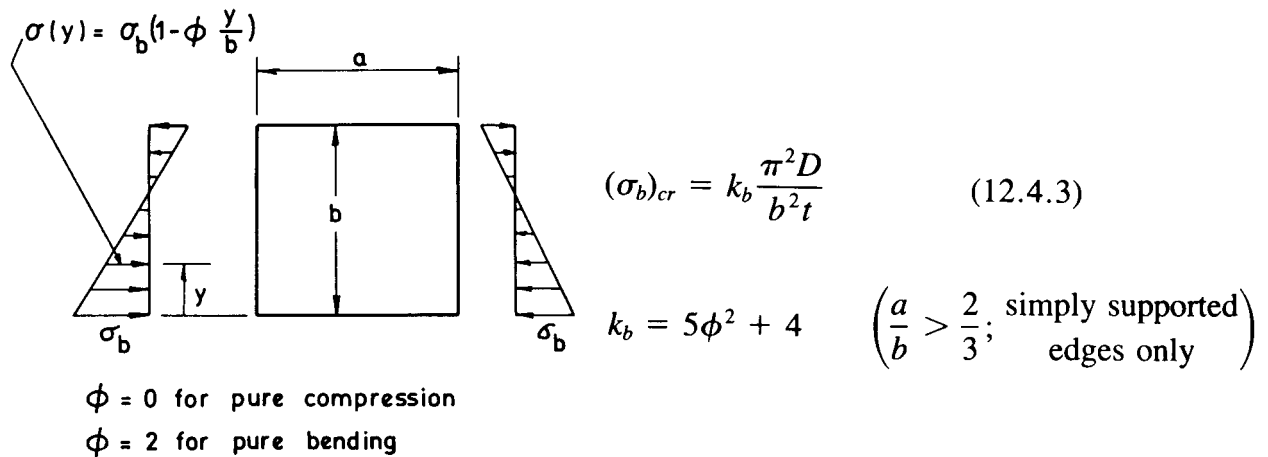


Figure 12.13

För ren böjbelastning i planet finns mera detaljerade värden på  $k_b$  angivna i SSD Tabell 12.4 för olika  $a/b$ -förhållanden och randvillkor. Observera här att bucklingsvägornas halvvåglängd blir  $2b/3$  jämfört med  $b$  för rent axiellt tryck.

Den lägsta bucklingsspänningen fås därför för  $a/b = m \cdot 2/3$

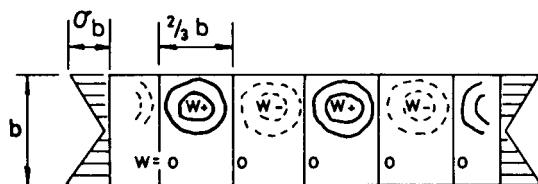


Figure 12.12

TABLE 12.4 BUCKLING COEFFICIENT  $k_b$  FOR PURE IN-PLANE BENDING

All edges simply supported

$a/b$	0.3	0.4	0.5	0.6	0.67
$k_b$	37.4	29.1	25.5	24.1	23.9

$a/b$	0.8	0.9	1.0	1.2	1.5
$k_b$	24.4	25.6	25.5	24.1	24.1

One unloaded edge clamped; other three edges simply supported

$a/b$	0.4	0.5	0.6	0.67	0.7
$k_b$	29.5	26.0	24.6	24.6	24.6

$a/b$	0.8	0.9	1.0	1.2	1.6	2.1
$k_b$	25.2	26.5	26.0	24.6	25.2	24.6

Unloaded edges clamped; loaded edges simply supported

$a/b$	0.3	0.35	0.4	0.47	0.5	0.6
$k_b$	47.3	43.0	40.7	39.6	39.7	41.8

$a/b$	0.7	0.8	1.0	1.2	1.5	2.0
$k_b$	43.0	40.7	39.7	40.7	39.7	39.7

## Skjuvbuckling av plåtfält

Ett stort antal plåtfält i fartygets konstruktionselement är utsatta för betydande skjuvspänningar. Detta gäller t ex livplåtarna i primära styrkeförband, skotten och bordläggningen.

En ren skjuvspänning ger i huvudspänningsriktningen (45°) upphov till en axiell tryckspänning, kombinerat med en vinkelrät axiell dragspänning. Det är tryckspänningen som ger upphov till bucklingen och denna kommer därför att utvecklas i 45°-riktning mot plåtfältets sidor.

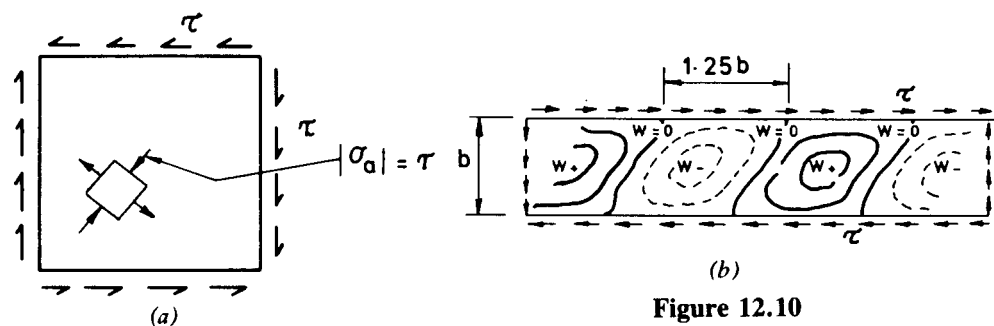


Figure 12.10

På samma sätt som för axiell belastning definieras en bucklingskoefficient  $k_s$  (eller  $K_s$ ).

$$\tau_{cr} = k_s \frac{\pi^2 D}{b^2 t} \quad (12.4.2a)$$

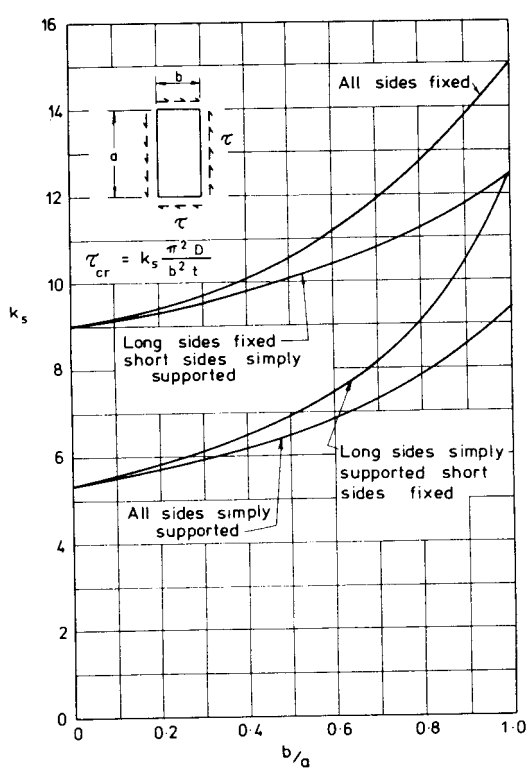


Figure 12.11a Buckling coefficient of flat plates in shear.

Observera att korrigeringen för plasticering ska göras mot jämförelsespänningen.

$$\sigma_{ekv} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + 3 \cdot \tau_{xy}^2}$$

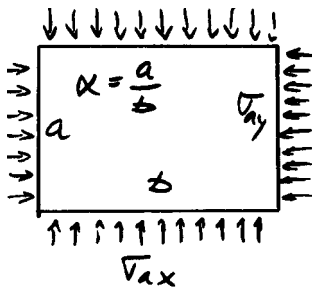
Johnson-parabeln kan fortfarande användas, men proportionalitetsgränsen över vilken korrektion erfordras sätts i fallet ren skjuvspänning till

$$\tau_{cr} > \frac{\sigma_Y}{2 \cdot \sqrt{3}}$$

och korrektionen blir

$$\tau_{crkorr} = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{3}} \cdot \left( 1 - \frac{\sigma_Y}{4 \cdot \sqrt{3} \cdot \tau_{cr}} \right)$$

## Kombinerade spänningstillstånd - Biaxiellt spänning



De kritiska spänningsnivåerna i plätens bägge huvudriktningar beräknas oberoende av varandra. Interaktionen mellan spänningskomponenterna kan uttryckas i dimensionslös form (se SSD Fig 12.8 för fritt upplagda plätsidor)

$$\left[ \left( \frac{m}{\alpha} \right)^2 \frac{\sigma_{ax}}{(\sigma_{ax})_{cr,1}} + n^2 \frac{\sigma_{ay}}{(\sigma_{ax})_{cr,1}} \right]_{cr} = \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{m}{\alpha} \right)^2 + n^2 \right]^2 \quad (12.3.2)$$

Korrigerig för plasticering görs pss som för skjuvspänningarna med avseende på jämförelsespänningen

$$\sigma_{ekv} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y} \quad \text{korrigeras} \quad \text{då} \quad \sigma_{ekv} > \frac{\sigma_Y}{2}$$

## Generella interaktionsformler

För kombinerade lastfall i planet är saknas ofta analytiska lösningar pga mycket komplicerade, icke-linjära beroenden mellan lasterna. Approximativa uttryck för beroendet mellan de olika spänningskomponenterna formuleras ofta som

$$\sum_i R_i^{n_i} \leq 1$$

där  $R_i$  = förhållandet mellan spänningskomponenten  $i$ 's aktuella värde och dess kritiska värde.

Exponenten  $n_i$  bestäms empiriskt.

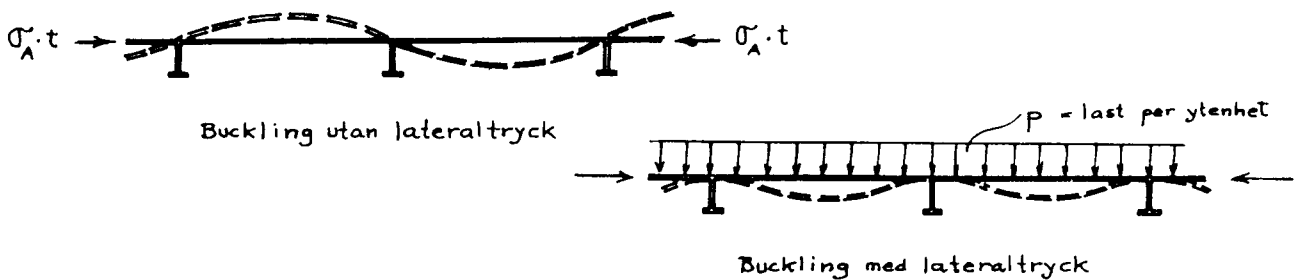
I SSD redovisas interaktionssamband för några olika kombinerade lastfall

- Axiell- Böjspänning (12.4.4)
- Axiell- Skjuvspänning (12.4.5)
- Bøj- Skjuvspänningar (12.4.6)
- Biaxiell - Skjuvspänning (12.4.7)

Korrigerig mot plasticering ska i samtliga fall ske mot jämförelsespänningen.

## Kombinerat axiella spänningar och lateralt tryck

En måttlig lateral last på ett rektangulärt plåtfält eller en avstyvad panel kan i viss mån höja den kritiska bucklingsspänningen genom att bucklingsformen påtvingas en enkel halvsinusvåg eller genom att ränderna kommer att uppträda som fast inspända. Denna höjning är dock inget som man normalt utnyttjar för dimensionering eftersom det laterala trycket kan upphöra temporärt varvid bucklingsformen kan slå om.



## Förstoringseffekt på utböjningar och böjspänningar

Vid samtidigt lateralt och axiellt tryck kommer axialtrycket att förstärka utböjningen och böjspänningarna.

Man definierar en förstoringsfaktor  $\Phi$  beroende av de axiella tryckspänningarna som appliceras på böjningen:

$$w = \Phi \cdot w_0 \quad \text{resp} \quad \sigma_b = \Phi \cdot \sigma_{b0}$$

Under antagande att utböjningen är liten ( $< t/2$ ) och den axiella spänningen under proportionalitetsgränsen  $\sigma_y/2$  kan man skriva:

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \frac{(\sigma_a)_{cr}}{(\sigma_a)_{cr} - \sigma_a} \\ (\sigma_a)_{cr} &= k^* \frac{\pi^2 D}{b^2 t} \end{aligned} \right\} \quad (12.5.3)$$

$k^*$  anger här bucklingskoefficienten för en buckla ( $m=n=1$ ) som förutsätts påtvingad på plåtfältet av det laterala trycket oberoende av  $a/b$ -förhållandet.  $(\sigma_a)_{cr}$  används okorrigerad.

1. All edges clamped:

$$k^* = 4 \frac{a^2}{b^2} + \frac{8}{3} + 4 \frac{b^2}{a^2} \quad (12.5.4a)$$

3. Loaded edges clamped, others simply supported:

$$k^* = \frac{3a^2}{4b^2} + 2 + \frac{4b^2}{a^2} \quad (12.5.4c)$$

2. All edges simply supported:

$$k^* = \frac{a^2}{b^2} + 2 + \frac{b^2}{a^2} \quad (12.5.4b)$$

4. Loaded edges simply supported, others clamped:

$$k^* = \frac{16a^2}{3b^2} + \frac{8}{3} + \frac{b^2}{a^2} \quad (12.5.4d)$$

## Buckling av förstyvade plåtfält - paneler

Vid ett förstyvdat plåtfält kan man identifiera ett antal tänkbara bucklingsfall. Den utböjningsform som har den lägsta kritiska bucklingsspänningen är den som kommer att bestämma hela panelens kritiska spänning.

Följande bucklingsformer är tänkbara:

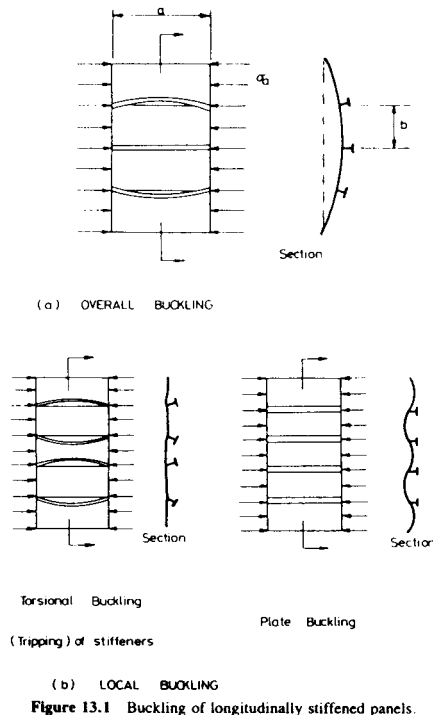


Figure 13.1 Buckling of longitudinally stiffened panels.

- Buckling av hela panelen inklusive förstyvningarna, sk lateralbuckling
- Buckling av plåtfälten mellan förstyvningarna.  
Vid en noggrannare analys bör man här ta hänsyn till förstyvningarnas inverkan på inspänningen av de lokala plåtfältens ränder
- Lokal buckling av de längsgående förstyvningarna i form av torsionsknäckning, livplåts- eller flänsbuckling.

SSD kapitel 11-13 behandlar dessa olika former, men på ett ganska splittrat sätt. Jag försöker här ge en mera generell beskrivning genom att delvis utnyttja den framställning som finns i tidigare kompendier om buckling av Svennerud/Ulfvarsson.

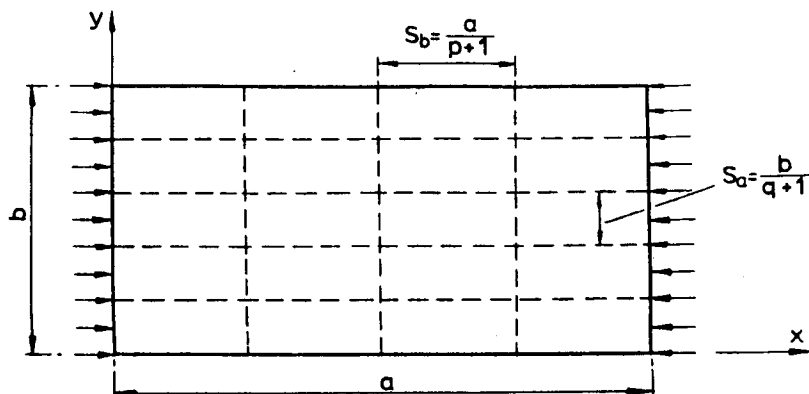
Om man bortser från lokal buckling av förstyvningarna, kan man (för fritt upplagda panelsidor) ur energisamband härleda en huvudekvation för buckling av avstyvade plåtfält

Denna innehåller styvhetsbidrag både från plåten och från förstyvningarna om dessa bucklar ut i den aktuella bucklingsformen. Om bucklingen sker mellan förstyvningarna ger dessa däremot inget bidrag till den kritiska bucklingsspänningen.

Man kan genom att undersöka olika bucklingsformer fastställa vilken som ger den lägsta kritiska bucklingsspänningen. Alternativt kan man beräkna vilket lägsta tröghetsmoment som krävs för att förstyvningarna inte ska buckla

## Huvudekvationen för buckling av ett förstyvat plåtfält

(ej i SSD)



Beteckningar:	Längd	Bredd	Tjocklek	Antal	Trögh.mom.	Area
Plåtfältet	a	b	t			
Längdförstyvningar	a	-	-	q	$I_a$	$A_a$
Tvärförstyvningar	b	-	-	p	$I_b$	$A_b$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot D}{b^2 \cdot (t + \delta_q \cdot t_a)} \cdot (P + L + T)$$

$$P = \frac{1}{m^2} \cdot \left[ m^2 \cdot \left( \frac{b}{a} \right) + n^2 \cdot \left( \frac{a}{b} \right) \right]^2$$

$$L = i_a \cdot m^2 \cdot \left( \frac{b}{a} \right)^2 \cdot \delta_q \quad i_a = \frac{E \cdot I_a \cdot (q + 1)}{D \cdot b}$$

$$T = i_b \cdot \frac{n^4}{m^2} \cdot \left( \frac{a}{b} \right)^2 \cdot \delta_p \quad i_b = \frac{E \cdot I_b \cdot (p + 1)}{D \cdot a}$$

P anger här plåtens bidrag vid godtycklig utböjningsform (m,n)

L anger längsförstyvningarnas bidrag

T anger tvärförstyvningarnas bidrag

$t_a$  är längsförstyvningarnas ekvivalenta plåttjocklek =  $A_a/s_a$

$i_a, i_b$  är längs- resp tvärförstyvningarnas relativa styvhet

$\delta_q = 0$  om uböjningen sker mellan längsförstyvningarna dvs om n är en jämn multipel av (q+1). I övrigt är  $\delta_q = 1$ .

$\delta_p = 0$  om uböjningen sker mellan tvärförstyvningarna dvs om m är en jämn multipel av (p+1). I övrigt är  $\delta_p = 1$ .

## Buckling av plåtfält mellan förstävningar

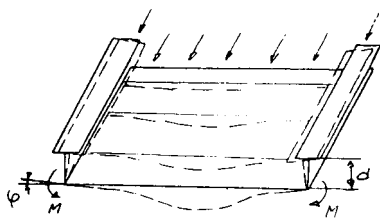
Den kritiska bucklingsspänningen följer det tidigare uttrycket

$$(\sigma_a)_{cr} = k \frac{\pi^2 D}{b^2 t} \quad (12.1.5)$$

där  $b$  i det här fallet är det lokala plåtfältets belastade sidlängd och  $k$  bestäms ur dimensionsförhållande och randvillkor.

Om man vill räkna konservativt (på säkra sidan) antar man att alla ränder är fritt upplagda. Lösningen kan då också direkt erhållas ur 'huvudekvationen' ovan. I verkligheten har förstävningarna en viss vridstyvhet som kan påverka plåtens inspänning och höja bucklingskoefficienten  $k$ . Vanligen är det dock bara inflytandet från de längsta sidornas inspänning som får någon betydelse. I SSD finns bucklingsfaktorn visad som funktion av en inspänningskoefficient  $\zeta$  definierad som

OBS för kontinuerliga förstävade plåtfält används  $\zeta / 2$  !!



$\zeta = (b/D)C_y$  för de obelastade sidornas inspänning (se Figure 12.6)

$\zeta = (a/D)C_x$  för de belastade sidornas inspänning (se Table 12.2 eller Figure 12.7)

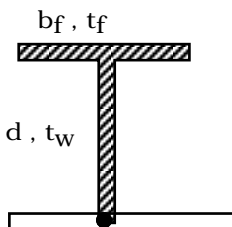
$C_{x,y}$  anger här förstävningens rotationsstyvhet =  $M/\phi$

$$C = \frac{\pi^2}{L^2} \cdot \left( \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\omega}}{L^2} + GK \right)$$

$L$  anger här längden mellan 'rotationsnollpunkter' dvs för ett längsförstävdat plåtfält ( $a > b$ ) används för  $C_y$ ,  $L = a/m$  ( $\approx b$ ) och för ett tvärförstävdat fält används för  $C_x$ ,  $L = b/n = b$  (alltså!)

$I_{\omega}$  är förstävningens sektoriella tröghetsmoment map rotation kring livets infästning vid plåten.

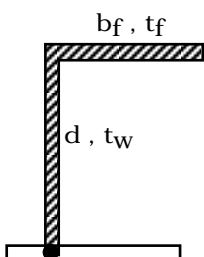
$K$  ( $J$  i SSD) är vridstyvhetens tvärsnittsfaktor.



För en T-profil:

$$I_{\omega} = t_f b_f^3 \cdot d^2 / 12$$

$$K = (b_f t_f^3 + d \cdot t_w^3) / 3$$



För en L-profil:

$$I_{\omega} = c \cdot t_f b_f^3 \cdot d^2 / 3$$

$$K = (b_f t_f^3 + d \cdot t_w^3) / 3$$

d/bf	1	1.5	2	3	4	6
c	0.62	0.7	0.75	0.81	0.85	0.89

## Torsionsknäckning av axiellt belastade förstävningar

Om man ska beräkna den kritiska spänningen för axiellt belastade förstävningar sammansatta av tunna plåtfält blir ofta torsionsknäckning dimensionerande snarare än lateralknäckning (som beskrivs i 'huvudekvationen').

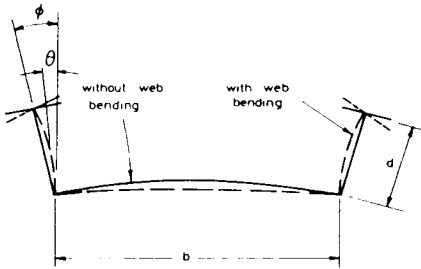


Figure 13.6 Effect of web bending.

En noggrann beräkning av torsionsstyvheten bör inkludera samverkan med plåtens böjning. Detta fall beskrivs utförligt i SSD sid 447-450.

$$EI_{sz} d^2 \frac{m^4 \pi^4}{a^4} + (GJ - \sigma_a I_{sp}) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + K_\phi(\sigma_a, m) = 0$$

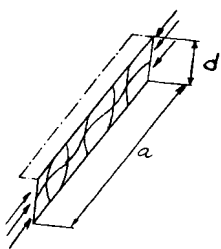
$$(13.1.15)$$

För enklare kontroller av förstävningarna är det vanligen (för fartygspaneler) försvarbart att försumma plåtens inverkan och enbart ta hänsyn till förstävningarnas vridstyvhet. Detta ger ett konservativt undre gränsvärde för den kritiska spänningen. SSD (13.1.24) med tillägg för St.Venantsk torsion ger

$$\sigma_{cr} = \frac{1}{I_{sp}} \cdot \left( \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_\omega}{a^2} + GK \right) \quad I_{sp} = d^2 \cdot \left( A_f + \frac{A_w}{3} \right)$$

där  $I_{sp}$  är det polära tröghetsmomentet ( $I_x + I_y$ ) med avseende på rotationscentrum.

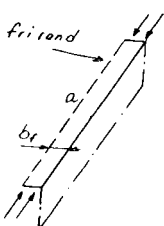
## Livplåtsbuckling av axiellt belastade förstävningar



Livplåten kan betraktas som en fritt upplagd plåt med mycket stort a/b-förhållande. Den kritiska bucklingsspänningen blir

$$\sigma_{cr} = 4 \cdot \frac{\pi^2 \cdot D_w}{d^2 \cdot t_w}$$

## Flänsbuckling av axiellt belastade förstävningar

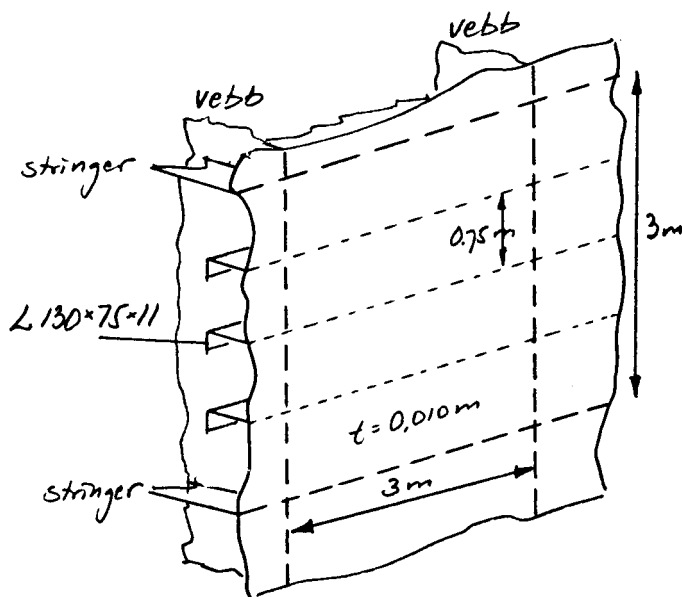


Flänsen betraktas som en plåt med tre sidor fritt upplagda och en sida helt fri. Den kritiska bucklingsspänningen blir

$$\sigma_{cr} = 0.425 \cdot \frac{\pi^2 \cdot D_f}{b_f^2 \cdot t_f}$$



## Beräkningsexempel - Förstyvad panel



Övre delen av innerbordläggningen på ett fartyg är preliminärt dimensionerad mot ett lateralt tryck från sidotanken på 50 kPa och har givits dimensioner enligt skissen här bredvid.

Vi ska nu kontrollera bucklingsstyrkan hos panelen.

## Allmänna uttryck

Vanligt fartygsstål har följande materialdata:

$$E := 2.1 \cdot 10^{11} \quad \nu := 0.3 \quad \sigma_Y := 240 \cdot 10^6$$

$$G := \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad G = 8.077 \cdot 10^{10}$$

'Plåtstyvheten' definieras:

$$D(t) := \frac{E \cdot t^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)}$$

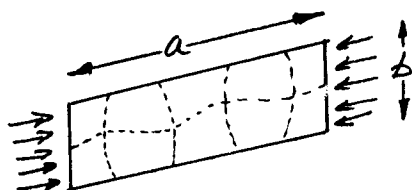
Den allmänna ekvationen för elastisk bucklingsspänning enligt (SSD 12.1.5) är:

$$\sigma_{cr}(k, b, t) := k \cdot \frac{\pi^2 \cdot D(t)}{b^2 \cdot t}$$

I de fall  $\sigma_{cr} > \sigma_Y/2$  korrigeras den kritiska spänningen för plasticering enl 'Johnson-parabeln':

$$\sigma_{korr}(\sigma_{cr}) := \text{if} \left[ \sigma_{cr} > \frac{\sigma_Y}{2}, \sigma_Y \cdot \left( 1 - \frac{\sigma_Y}{4 \cdot \sigma_{cr}} \right), \sigma_{cr} \right]$$

## Beräkningsexempel: Plåtfältet mellan förstävningar



$$a := 3 \quad b := 0.75 \quad t := 0.010$$

Under antagande att plåtfältet är fritt upplagt vid ränderna erhålls kritisk bucklingsspänning ur (SSD 12.1.6):

$$\frac{a}{b} = 4 \quad m := 4 \quad k := \left( \frac{m \cdot b}{a} + \frac{a}{m \cdot b} \right)^2$$

$$k = 4$$

ger

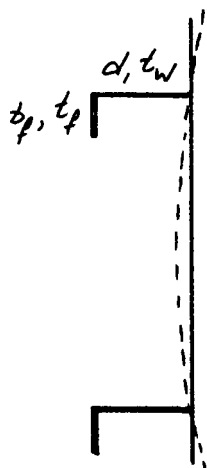
$$\sigma_{pl.e} := \sigma_{cr}(k, b, t) \quad \sigma_{pl.e} = 1.35 \cdot 10^8$$

$$\sigma_{pl.k} := \sigma_{korr}(\sigma_{pl.e}) \quad \sigma_{pl.k} = 1.333 \cdot 10^8$$

dvs den kritiska korrigerade bucklingsspänningen utan hänsyn till long'ar är 133 MPa

## Med hänsyn till inspänning vid longitudinalerna

Enligt FA sid 4.3.3 bestäms k med hänsyn till  $\zeta/2$ :



$$b_f := 0.075 \quad t_f := 0.011 \quad d := 0.130 \quad t_w := 0.011$$

$$K := \left( b_f \cdot t_f^3 + d \cdot t_w^3 \right) \cdot \frac{1}{3} \quad K = 9.095 \cdot 10^{-8}$$

$$I_\omega := 0.71 \cdot t_f \cdot b_f^3 \cdot d^2 \cdot \frac{1}{3} \quad I_\omega = 1.856 \cdot 10^{-8}$$

$$L := \frac{a}{m} \quad L = 0.75$$

$$C_y := \frac{\pi^2}{L^2} \cdot \left( \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_\omega}{L^2} + G \cdot K \right) \quad \zeta := \frac{b}{D(t)} \cdot C_y \quad \frac{\zeta}{2} = 25.913$$

Bucklingskoefficienten k tas ur SSD Fig.12.6:

$$k := 6$$

$$\sigma_{pl.e} := \sigma_{cr}(k, b, t) \quad \sigma_{pl.e} = 2.025 \cdot 10^8$$

$$\sigma_{pl.k} := \sigma_{korr}(\sigma_{pl.e}) \quad \sigma_{pl.k} = 1.689 \cdot 10^8$$

Kritisk bucklingsspänning för plåten blir alltså 169 MPa

## Beräkningsexempel:

Även longitudinalernas bucklingsspänning bör kollas. Enligt uttrycken på FA sid 4.3.4 erhålls följande kritiska spänningar:

### Torsionsknäckning av longitudinaler

$$I_{sp} := d^2 \cdot \left( b_f \cdot t_f + d \cdot t_w \cdot \frac{1}{3} \right)$$

$$\sigma_{\text{long.tor.e}} := \frac{1}{I_{sp}} \cdot \left( \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\omega}}{a^2} + G \cdot K \right) \quad \sigma_{\text{long.tor.e}} = 5.282 \cdot 10^8$$

$$\sigma_{\text{long.tor.k}} := \sigma_{\text{korr}}(\sigma_{\text{long.tor.e}}) \quad \sigma_{\text{long.tor.k}} = 2.127 \cdot 10^8$$

### Livplåtsbuckling av longitudinaler

$$\sigma_{\text{long.liv.e}} := \sigma_{cr}(4, d, t_w) \quad \sigma_{\text{long.liv.e}} = 5.436 \cdot 10^9$$

$$\sigma_{\text{long.liv.k}} := \sigma_{\text{korr}}(\sigma_{\text{long.liv.e}}) \quad \sigma_{\text{long.liv.k}} = 2.374 \cdot 10^8$$

### Flänsbuckling av longitudinaler

$$\sigma_{\text{long.fl.e}} := \sigma_{cr}(0.425, b_f, t_f) \quad \sigma_{\text{long.fl.e}} = 1.735 \cdot 10^9$$

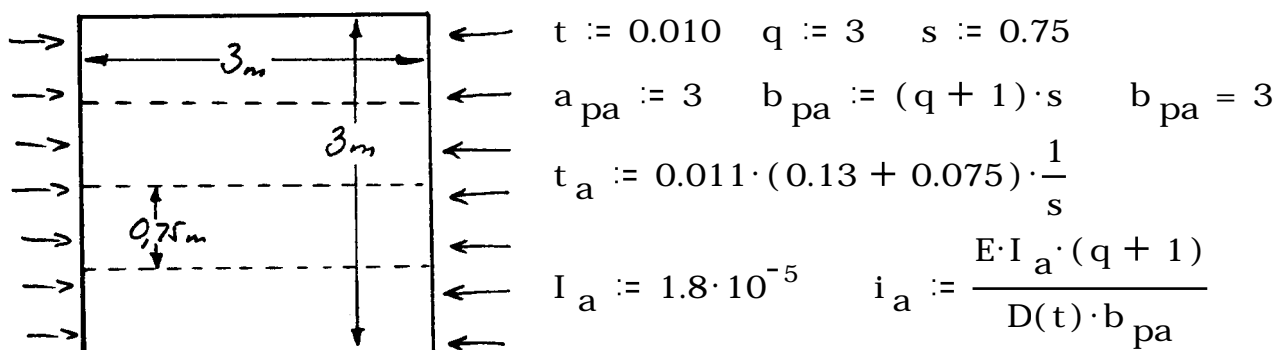
$$\sigma_{\text{long.fl.k}} := \sigma_{\text{korr}}(\sigma_{\text{long.fl.e}}) \quad \sigma_{\text{long.fl.k}} = 2.317 \cdot 10^8$$

Longitudinalerna är således mycket styva!

### Buckling av hela panelen

Eftersom long'arna är så styva kan vi inte förvänta oss någon risk för att hela panelen bucklar ut. Vi gör dock en enkel kontroll med hjälp av 'huvudekvationen' FA sid 4.3.2.

Longitudinalernas tröghetsmoment  $I_a$  beräknas med hänsyn till medverkande plätfläns



**Beräkningsexempel:**

Buckling av hela panelen, forts.

med  $m=1$ ,  $n=1$ ,  $\delta_q=1$ ,  $\delta_p=0$  erhålls:

$$P := \left( \frac{b_{pa}}{a_{pa}} + \frac{a_{pa}}{b_{pa}} \right)^2 \quad L := i_a \cdot \left( \frac{b_{pa}}{a_{pa}} \right)^2 \quad k := (P + L)$$

$$P = 4 \quad L = 262.08 \quad k = 266.08$$

$$\sigma_{panel.e} := \sigma_{cr}(k, b_{pa}, t + t_a) \quad \sigma_{panel.e} = 9.493 \cdot 10^8$$

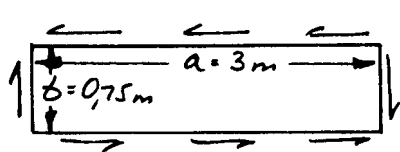
$$\sigma_{panel.k} := \sigma_{korr}(\sigma_{panel.e}) \quad \sigma_{panel.k} = 2.248 \cdot 10^8$$

Vi ser att styvhetsbidraget från plåten i detta sammanhang är helt försumbar.

**Skjuvbuckling**

Eftersom panelen är en del av sidobordläggningen kan vi förvänta oss att skjuvspänningarna kan vara relativt höga.

Bucklingskoefficienten för skjuvspänningar erhålls ur SSD Fig.12.11a (FA sid 4.2.5). (Observera att här är alltid  $b$  den korta sidan)



$$\frac{b}{a} = 0.25 \quad k_s := 6 \quad (\text{konservativt})$$

$$\tau_{pl.e} := \sigma_{cr}(k_s, b, t) \quad \tau_{pl.e} = 2.025 \cdot 10^8$$

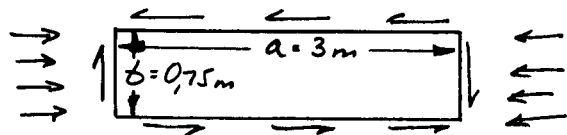
$$\tau_{pl.k} := \frac{\sigma_{korr}(\tau_{pl.e} \cdot \sqrt{3})}{\sqrt{3}} \quad \tau_{pl.k} = 1.149 \cdot 10^8$$

Den kritiska bucklingsspänningen blir alltså 115 MPa.

I verkligheten är  $k_s > 6$  pga inspänningen vid longitudinalerna.

(Antar man att sidorna är helt inspända blir  $k_s = 9.5$  och den kritiska korrigerade bucklingsspänningen blir ca 123 MPa).

## Beräkningsexempel: Kombinerad skjuvspänning och axiell spänning i plåten



Vid vertikal böjning av skrovbalken i sagging, kommer sidobordläggningens övre del att utsättas för axiella tryckspänningar kombinerat med skjuvspänningar. För de globala belastningarna är förhållandet mellan dessa spänningskomponenter konstant.

Vi antar att skjuvspänningarna utgör 50% av de axiella spänningarna. Interaktionssambandet ges av (SSD12.4.5):

$$\tau_{pl} := \frac{\sigma_{pl}}{2} \quad \frac{\sigma_{pl}}{\sigma_{pl,e}} + \left( \frac{\tau_{pl}}{\tau_{pl,e}} \right)^2 = 1$$

Den okorrigerade lösningen ges av:

$$\sigma_{c,e} := \text{root} \left[ \frac{\sigma_{pl}}{\sigma_{pl,e}} + \left[ \frac{\frac{\sigma_{pl}}{2}}{\tau_{pl,e}} \right]^2 - 1, \sigma_{pl} \right] \quad \sigma_{c,e} = 1.677 \cdot 10^8$$

$$\tau_{c,e} := \frac{\sigma_{c,e}}{2} \quad \tau_{c,e} = 8.386 \cdot 10^7$$

Jämförelsespänningen vid denna nivå korrigeras:

$$\sigma_{vM} := \sqrt{\sigma_{c,e}^2 + 3 \cdot \tau_{c,e}^2} \quad \sigma_{vM} = 2.219 \cdot 10^8$$

$$\sigma_{vM,k} := \sigma_{\text{korr}}(\sigma_{vM}) \quad \sigma_{vM,k} = 1.751 \cdot 10^8$$

korrigerade kritiska spänningar blir:

$$\sigma_{c,k} := \text{root} \left[ \sqrt{\sigma_{c,k}^2 + 3 \cdot \left( \frac{\sigma_{c,k}}{2} \right)^2} - \sigma_{vM,k}, \sigma_{c,k} \right]$$

$$\sigma_{c,k} = 1.324 \cdot 10^8 \quad \tau_{c,k} := \frac{\sigma_{c,k}}{2} \quad \tau_{c,k} = 6.618 \cdot 10^7$$

Plåtfältet mellan förstyvningarna kommer att buckla vid samtidigt 138 MPa axiella tryckspänningar och 69 MPa skjuvspänningar.

## Gränslast för plåtfält

Den bifurkationsspänning (elastisk eller korrigerad) som vi hittills har studerat ger ett dimensioneringsvärde på när buckling kommer att inträffa. Om plåtfältets ränder är helt fria så svarar den även mot den absolut högsta last som plåten kan bära.

I de flesta fall i fartygskonstruktioner är plåtfälten omgivna av förstävningar som förhindrar plåtens utböjning i ränderna. För att kollaps ska inträffa krävs därför antingen att även ränderna bucklar ut eller att materialets sträckgräns överskrids.

För ett tunt plåtfält sker elastisk buckling vid en relativt låg spänning. Efter utbuckling tar de utböjda delarna av plåtfältet en betydligt mindre del av den axiella belastningen och de axiella spänningarna kommer att omfördelas mot ränderna. Plåtfältet kan dock fortsätta att ta ökande last ända tills sträckgränsen uppnås, men styvheten i plåten blir väsentligt lägre än före buckling.

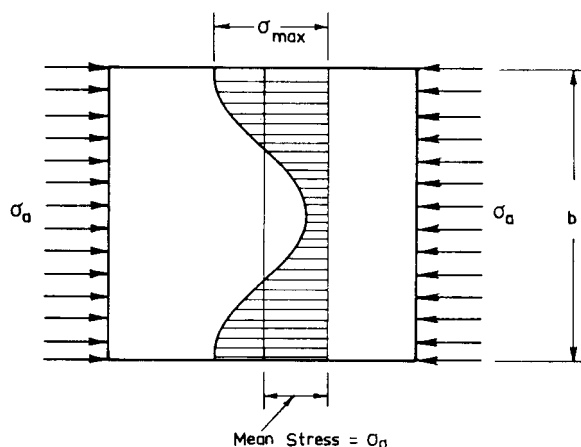


Figure 12.21 Post-buckling stress distribution.

För plåtböjning/  
buckling över det  
elastiska området  
används en  
slankhetsparameter  $\beta$   
enligt (SSD 9.3.1):

$$\beta = \frac{b}{t} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_y}{E}}$$

Den lägre styvheten efter buckling leder i sammansatta strukturer till att lastupptagningen omfördelas till andra delar. Gränslasten för en axiellt belastad struktur kan därför vara betydligt större än den last vid vilken enskilda plåtfält börjar buckla.

En 'typisk'  
bordläggningsplåt  
har  $b = 0.8$ ,  $t = 0.015$   
vilket ger

$$\beta = \frac{0.8}{0.015} \cdot \sqrt{\frac{240 \cdot 10^6}{210 \cdot 10^9}} = 1.8$$

I fartygspaneler bestäms ofta plåtfältens storlek och tjocklek av krav på den laterala bärförmågan. Detta gör att slankhetstalet blir relativt lågt (typiskt  $\beta \leq 2$ ). Marginalen mellan bifurkation och kollaps är därför relativt liten och den kritiska bucklingsspänningen används direkt som dimensioneringskriterium.

### 'Load- end shortening curves'

Det vanligaste sättet att återge plåtfälts egenskaper under axiell last upp i det plastiska området är att plotta den axiella medelspänningen  $\sigma_a$  som funktion av medeltöjningen  $\epsilon_a$ .

De viktigaste parametrarna som styr sambandet  $\sigma_a$ - $\epsilon_a$  är:

- Plåtfältets dimensionsförhållanden (slankheten  $\beta$ )
- Restspänningstillståndet  $\sigma_r$
- Initialdeformationerna  $\delta_p$ .

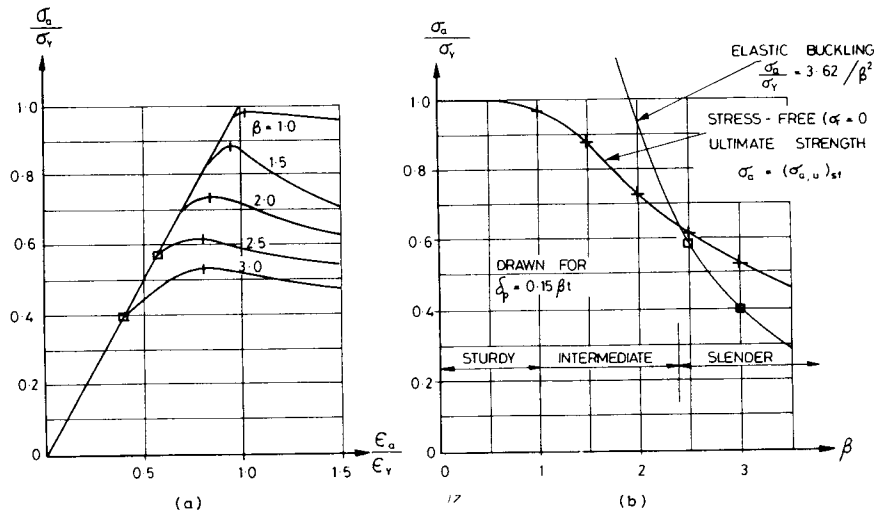


Figure 12.20 Plate strength without welding ( $\sigma_r = 0$ ).

Ett plåtfält som svetsas in i en konstruktion vid ränderna erhåller restspänningar vid avsvälning. Dessa ger en tryckspänning  $\sigma_r$  över större delen av plåtfältet medan ränderna får en dragspänning av sträckgränsens storlek.

Effekten av egenspanningstillståndet blir att den kritiska bucklingsspänningen minskar med  $\sigma_r$  medan töjningen vid kollaps ökar avsevärt. Effekten av initialdeformationer blir framför allt att övergången mot kollaps sker mera succesivt, utan en tydlig bifurkationspunkt.

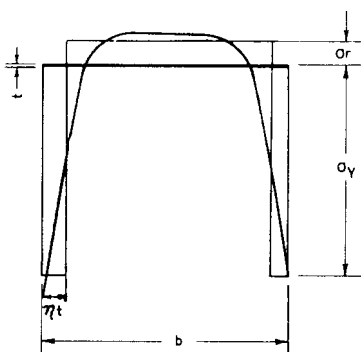


Figure 11.6 Typical residual stresses in welded sections.

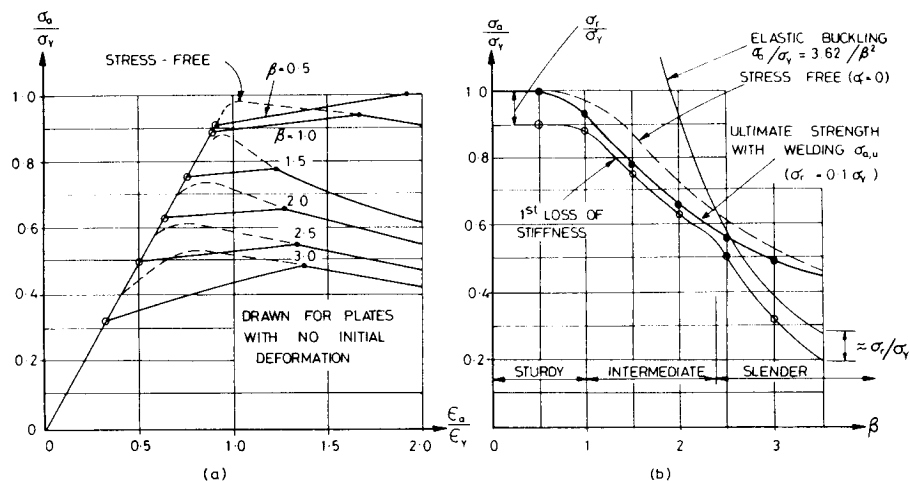


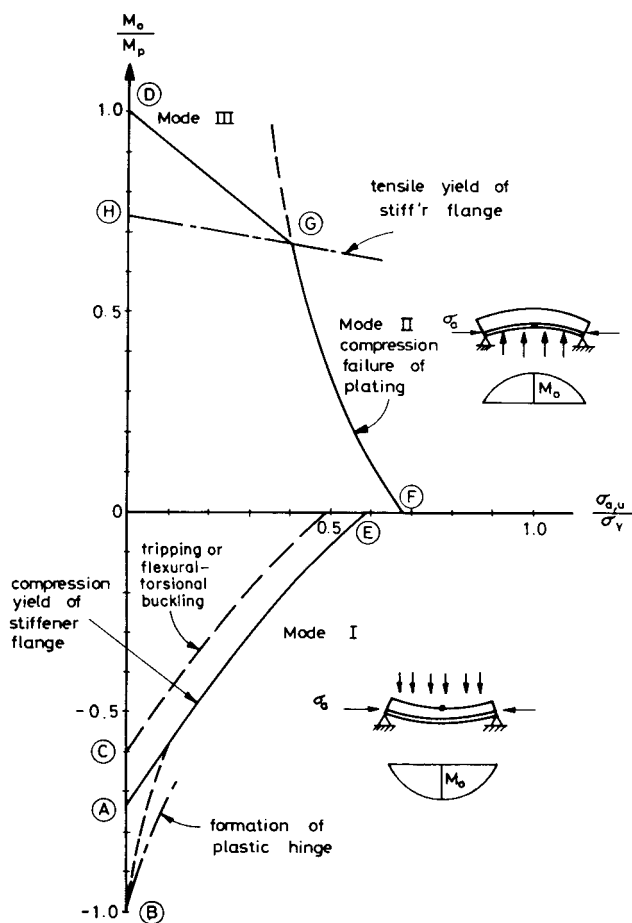
Figure 12.23 Plate strength with welding ( $\alpha = 0.1 \sigma_r$ ).

## Kollaps av förstyvade paneler

Kollapslasten för en fartygspanel blir beroende av det laterala trycket (lokalt yttre vattentryck eller inre tanktryck) i kombination med axiell belastning (från böjning av skrovbalken eller primära styrkeförband).

Även inspänningsförhållandena för panelen påverkar lastupptagningsförmågan, men eftersom man i praktiken aldrig kan säkerställa att en panel är fast inspänd pga osymmetri i lastfall etc, utgår man vanligen från att panelerna kan vara fritt upplagda (konservativt).

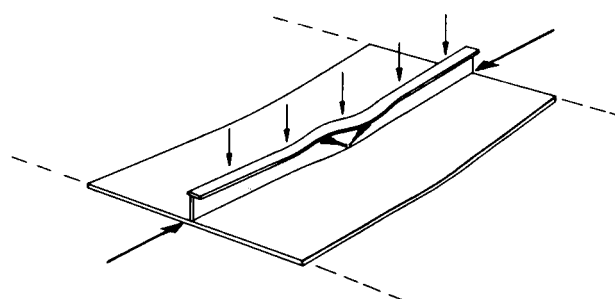
På grund av inflytande från många olika parametrar är det svårt att skapa någon enkel beräkningsmetod för kollapsmekanismerna. Modellförsök i full (eller nära nog full) skala utnyttjas därför för att ta fram dimensioneringskurvor.



**Figure 14.2** Collapse mechanisms in a stiffened panel under lateral and in-plane loads.

Neutrallagret för förstyvning-plåt ligger vanligen mycket nära plåtens plan (även med hänsyn till effektiv fläns). Detta gör att vid lateral belastning av panelen kommer förstyvningarna att vara huvudsakligen belastade i drag (om trycket kommer från plåtsidan) eller tryck (om tryckbelastningen verkar på förstyvningens sida).

I det senare fallet (Mode I) erhålls vanligen en betydligt lägre kollapslast pga lokal buckling av förstyvningarna.



**Figure 14.4** Local plastic collapse mechanism in a stiffener flange.



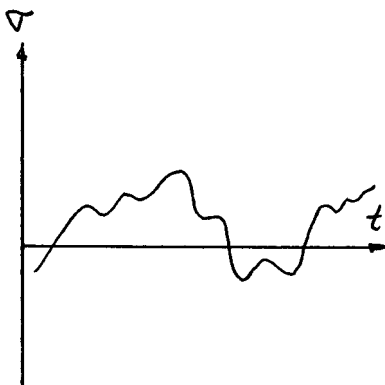
## Utmattningsdimensionering av konstruktionselement i fartyg

karaktiseras av:

Stor andel varierande laster av oregelbunden karaktär:

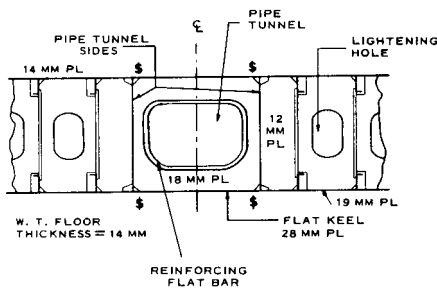
- Lugnvattenbelastningar
- Våginducerade belastningar

Stor osäkerhet vid bestämning av långtidsfördelningar av spänningsvariationerna pga:



- Kombinerat inflytande från olika lastkomponenter (primära, sekundära, olika frekvenser etc)
- Osäkerhet i förutsägelser av sjötillståndet (vågspektrumens långtidsfördelning, ruttval)
- Stort inflytande från fartygets handhavande
- Överlagrade lokala restspänningar (från tillverkning, tidigare överlastar etc)

Stor osäkerhet vid bestämning av utmattningsstyrkan i lokala förband pga:

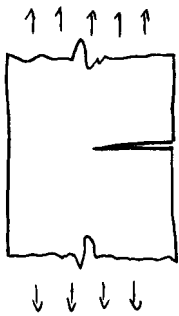


- Vanliga dimensioneringskriterier för fartyg är huvudsakligen baserade på nominella spänningar, (till skillnad från utmattningsstyrkan som är beroende av 'hot-spot' spänningar)
- Många intefererande spänningskoncentrationer (SC) från den lokala geometrin
- Ständig närvaro av svetsar och skurna kanter i kritiska punkter
- Stort inflytande från kvaliteten i tillverkningen (passning-toleranser, svetsning,)
- Stort inflytande från korrosion (målning)

Sammantaget har detta lett till att klassen inte har haft explicita utmattningsregler för dimensionering av fartyg. I stället har utmattningaspekten beaktats i tillåtna spänningsnivåer, krav på detaljutföranden etc. En förändring av detta är dock på gång sedan början av 90-talet och nya dimensioneringsregler mht utmattning är under införande.

## Utmattningsdimensionering kan i princip baseras på:

### Brottmekanik

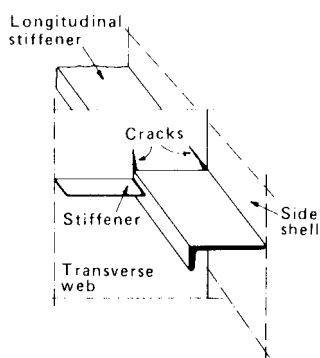


Kräver detaljerad kännedom om materialegenskaperna, sprickgeometri, spänningstillstånd vid sprickan.

Brottmekanik ger möjlighet att beräkna spricktillväxt cykel för cykel, och är speciellt användbart (nödvändigt) för att bedöma om en upptäckt spricka är 'farlig' eller inte.

Som allmän dimensioneringsmetod för konstruktionselement i fartyg (med den osäkerhet som råder) ges inga fördelar jämfört med enklare dimensioneringsmetoder.

### Komponentprovning



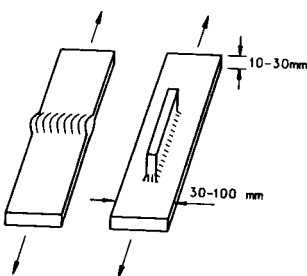
'Storskalig' komponentprovning av hela eller stora delar av verkliga förband ger möjlighet att inkludera inflytande från: tillverkning, svetsgeometri, lokala geometriska spänningskoncentrationer, omlagringar av spänningar, (ev även korrosion)

I princip kan livslängden bestämmas som funktion av nominella spänningar.

Metoden ger möjlighet till direkt utvärdering av kritiska punkter med höga spänningskoncentrationer.

Komponentprovningens stora nackdelar är förstas kostnaderna. Den kan ge goda resultat för en specifik geometri, ett specifikt lastfall etc. Så fort något av ingångsvärdena ändras måste i princip proven upprepas (för varje ingångsvärde måste många prov genomföras eftersom spridningen av livslängden är stor!). I praktiken är det därför omöjligt att använda storskalig komponentprovning som generellt underlag för dimensionering av fartygs konstruktionselement.

### Detaljprovning av svetsförband



Inflytande från svetsens kvalitet och geometri finns med i provresultaten. Livslängden bestäms som funktion av lokala spänningar i omgivningen till svetsen. Inflytandet från lokala geometriska spänningskoncentrationer tas hänsyn till vid dimensioneringen, inte vid provningen.

Den sistnämnda metoden är i praktiken lämpligast som generell dimensioneringsmetod på konstruktionsstadiet. Den används som standard för dimensionering av offshore konstruktioner där bevisad utmattningshållfasthet är ett krav.

## Principer för linjär - elastisk brottmekanik

(ur 'Fatigue Handbook', Tapir, NTH, 1985)

Fracture mechanics seeks to define the *local conditions* of stress and strain around a crack, in terms of the *global parameters* of loads, geometry, etc., under which the crack will extend (Fig. 3.1).

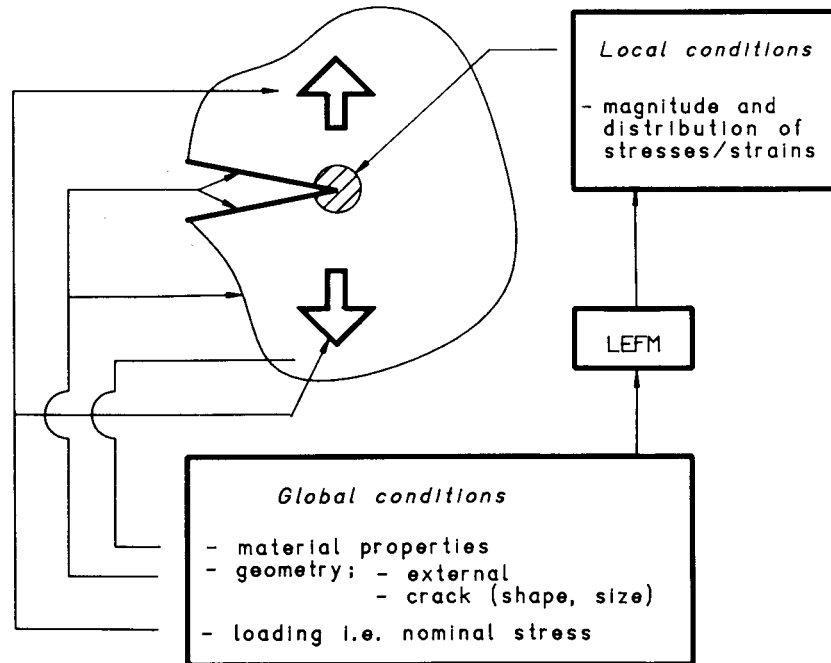


Fig. 3.1 Linear-elastic fracture mechanics linking global conditions with local crack-tip response.

Various approaches have been employed in the analysis of fracture problems, leading to the introduction of various fracture mechanics parameters, e.g.  $G$ ,  $J$ ,  $COD$ ,  $K$  – all being interrelated. The most popular among these parameters has been *the stress intensity factor*,  $K$ . In fact, a fundamental principle of linear-elastic fracture mechanics is that the stress field ahead of a sharp crack can be characterized in terms of this single parameter,  $K$ .

Fracture mechanics can be subdivided into two general categories, namely *linear-elastic* (LEFM) and *elastic-plastic* (EPFM). This section will be restricted to LEFM, its analytical basis and the practical evaluation of the stress intensity factor.

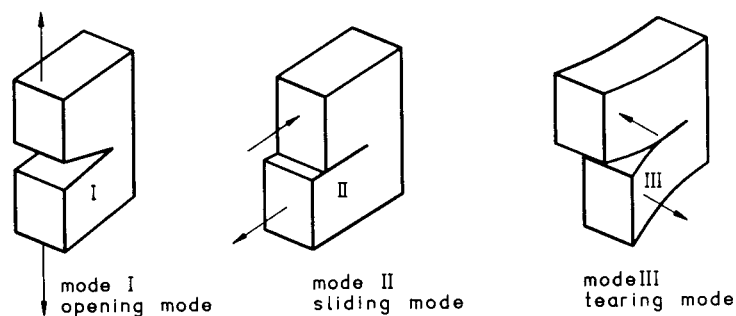


Fig. 3.2 The three modes of cracking.

## Spänningsintensitetsfaktorn K

Spänningstillståndet runt sprickspetsen antas entydigt kunna beskrivas av K (beloppet) och r,  $\theta$  (fördelningen):

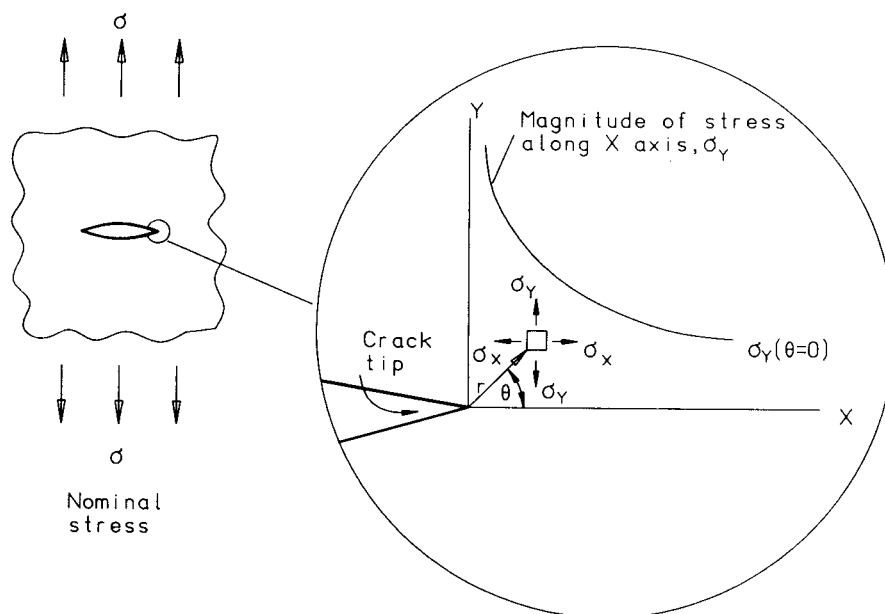


Fig. 3.3 Schematic illustration of the elastic stress-field distribution near the tip of a crack (Mode I deformation).

$$\sigma_Y = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin 3 \frac{\theta}{2} \right]$$

$$\sigma_X = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin 3 \frac{\theta}{2} \right]$$

$$\tau_{XY} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos 3 \frac{\theta}{2}$$

$$\sigma_Z = \tau_{XZ} = \tau_{YZ} = 0 \text{ for plane stress}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_Z = \nu[\sigma_X + \sigma_Y] \\ \tau_{XZ} = \tau_{YZ} = 0 \end{array} \right\} \text{ for plane strain}$$

Spänningsintensitetsfaktorn K är beroende av lastens typ och storlek, samt sprickans geometri och den lokala geometrin i materialet där sprickan finns.

För att linjär-elastisk brottmekanik ska kunna användas måste den plastiska zonen runt sprickspetsen vara liten i förhållande till sprickans storlek. Detta förhållande gäller för 'högcykel-utmattning' som förekommer i fartygsförband.

## Beräkning av K i linjär-elastisk brottmekanik

### *A practical hybrid method*

#### *Introduction*

This method is basically an influence function – and a superposition method. It employs available solutions for two- and three-dimensional crack problems. From these the influence of different factors affecting K are separated and used to "compose" an estimate of K in an actual case /14-20/.

#### *General expression for K*

K may be conveniently expressed as:

$$K = \sigma \sqrt{\pi a} \cdot F$$

where:

$$F = F_E \cdot F_S \cdot F_T \cdot F_W \cdot F_G$$

$F_E$  = basic crack shape factor

$F_S$  = front face factor

$F_T$  = back face or finite thickness factor

$F_W$  = finite width factor

$F_G$  = stress gradient factor

Ovanstående uttryck visar principiellt beroendet av geometri och spänningstillstånd runt sprickan.

$F_E$  tar hänsyn till sprickformen (förhållandet mellan spricklängd och sprickbredd)

$F_S$  tar hänsyn till geometrin vid sprickans öppning (beroende av spänningstillståndet, sprickutbredningsriktning, den fria ytans form mm)

$F_T$  tar hänsyn till tjockleksinflytandet framför sprickans spets

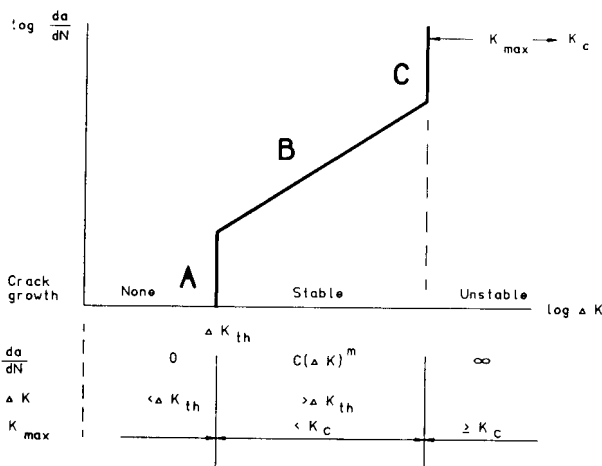
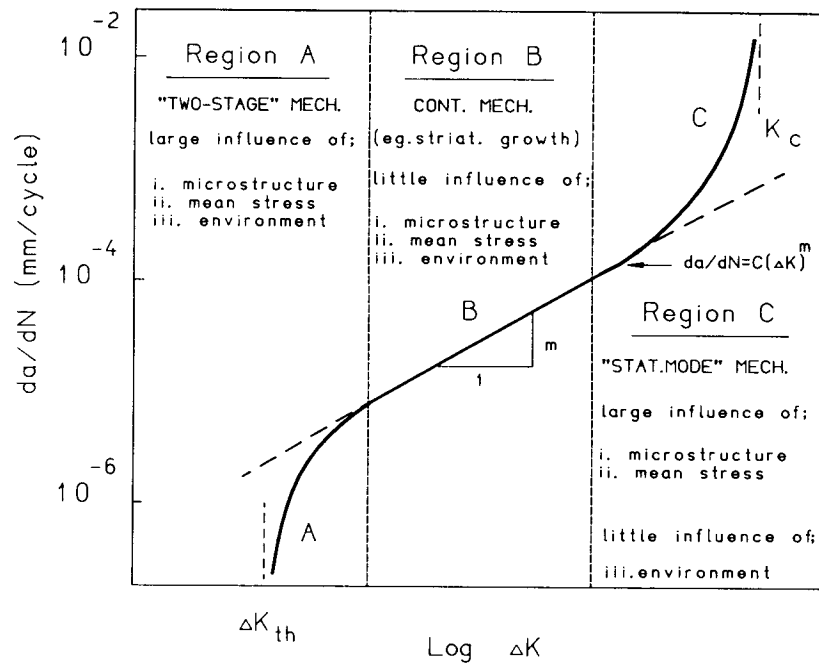
$F_W$  tar hänsyn till 'kantavståndet' för en genomgående spricka

$F_G$  tar hänsyn till den lokala geometriska spänningsfördelningen runt sprickan (utan hänsyn till sprickan)

Flera formler för beräkning av K för olika typer av svetsförband finns återgivna eller refererade till i 'Fatigue Handbook' ur vilken det mesta av detta material är hämtat.

## Spricktillväxt som funktion av cykliskt varierande spänning

Spricktillväxten per cykel ( $da/dN$ ) för en existerande spricka som funktion av spänningsintensitetsfaktorns variation under cykeln kan beskrivas i de tre faserna A (ingen eller mycket liten tillväxt), B (stabil propagering), och C (brottfas).



Idealized crack growth rate curve.

I förenklad form beskrivs ofta spricktillväxten med *Paris eq.* :

$\frac{da}{dN} = 0$	$\Delta K < \Delta K_{th}$
$\frac{da}{dN} = C \cdot \Delta K^m$	$\Delta K_{th} < \Delta K < K_c$
$\frac{da}{dN} = \infty$	$K_{max} > K_c$

C och m är konstanter beroende av material, miljö, lastfrekvens medelspänning, etc. Paris ekvation överskattar spricktillväxten i område A, och underskattar den i område C enligt fig. ovan. Den helt dominerande delen av utmattningstidslängden vid högcykelutmattning (måttliga belastningsnivåer) ligger dock i område A och B. (För svetsade konstruktioner i område B).

## Samband mellan spricktillväxt och SN-kurva (livslängdskurva)

Livslängden för en verklig detalj uttryckt i antal belastningsväxlingar fram till ett utmattningsbrott kan delas upp i en initieringsfas och en propageringsfas:

$$N_f = N_i + N_p$$

Propageringsfasen kan enligt Paris' skrivas:

$$N_p = \int_{N_i}^{N_f} 1 \, dN = \int_{a_i}^{a_f} \frac{1}{C \cdot \Delta K^m} da = \int_{a_i}^{a_f} \frac{1}{C \cdot (\Delta \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a \cdot F})^m} da$$

för belastning vid konstant amplitud kan vidare skrivas

$$N_p = \frac{1}{C \cdot (\Delta \sigma \cdot \sqrt{\pi})^m} \cdot \int_{a_i}^{a_f} \frac{1}{(\sqrt{a \cdot F})^m} da = \frac{I}{C_1 \cdot \Delta \sigma^m}$$

Integralen I blir i praktiken konstant, oberoende av  $\Delta \sigma$  så länge  $a_f \gg a_i$ .

Om vi utgår från att en spricka redan finns initierad - genom t.ex svetsning - blir hela livslängden  $N_f = N_p$  uttryckt i spänningsamplituder:

### SN-kurvan

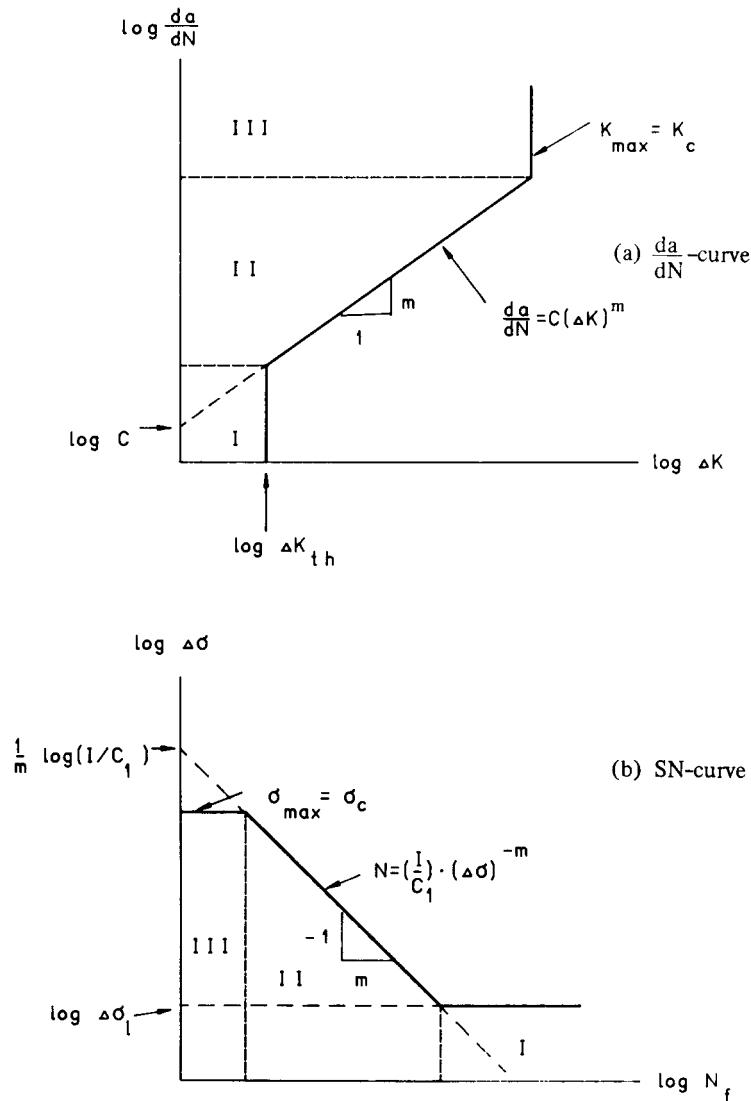
$$N_f = a \cdot \Delta \sigma^{-m} \quad \text{eller} \quad \log(N_f) = \log(a) - m \cdot \log(\Delta \sigma)$$

Detta samband beskriver den sk SN-kurvan ( $S = \Delta \sigma$ ) som med de idealiseringar som angivits ovan (högcykelutmattning, svetsförband) blir en rät linje i ett  $\log(N) - \log(\Delta \sigma)$  diagram.

Uttrycket gäller under förutsättning att  $\Delta \sigma$  är tillräckligt stort för att det överhuvudtaget ska ske någon spricktillväxt, dvs

$$\Delta \sigma > \frac{\Delta K_{th}}{\sqrt{\pi \cdot a \cdot F}} \quad \text{denna minsta sprickdrivande spänning brukar kallas 'utmattningsgränsen' (S<sub>0</sub>)}$$

## Samband mellan spricktillväxt och SN-kurva (ur 'Fatigue Handbook')



Relationship between  $\frac{da}{dN}$ - and SN-curves.

Region	da/dN-curve	SN-curve
I	<i>Threshold region</i> (No - or intermittent growth)	<i>Fatigue limit region</i> (Infinite life)
II	<i>Intermediate region</i> (Regular striation growth. Paris' eq.)	<i>Finite life region</i> (Intermediate - and high-cycle region)
III	<i>Failure region</i> (Fast fracture or yielding)	<i>Low-cycle or static failure region</i>



## Utmattningsprovning

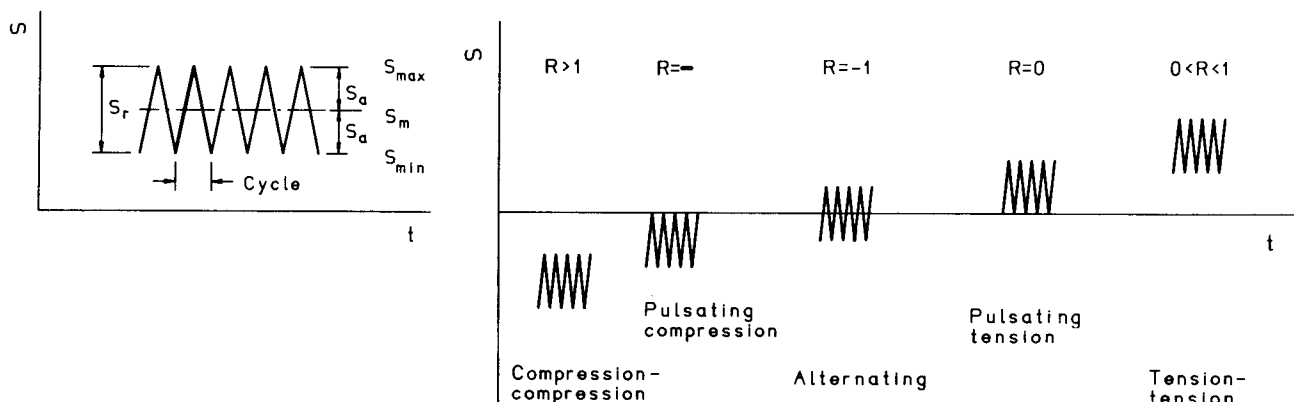
För att fastställa ett material eller förbands utmattningsegenskaper genomförs laboratorieprov med cykliskt varierande belastningar. Om provet genomförs vid konstant spänningsamplitud (ofta relaterat till oskadat provstycke) ända tills brott erhålls en punkt i SN-kurvan för varje prov. Eftersom den viktigaste delen av SN-kurvan ofta ligger vid livslängder på i storleksordningen  $10^4 - 10^7$  lastväxlingar, inses lätt att utmattningsprovning tenderar att bli ganska omfattande, speciellt som spridningen i provdata är betydande!

Utmattningsprov kan utföras för t ex:

- Polerade provstavar (initieringsfasen betydande)
- Svetsförband (initieringsfasen obetydlig)
- Hela konstruktionselement (för att kunna ta hänsyn till komplexa spänningstillstånd och omlagringar av spänningar)

Vid konstantamplitud-provning brukar livslängden uttryckas som funktion av spänningvidden, *stress range*, dubbelamplitud,  $S_r$ ,  $\Delta\sigma$ , och medelspänningen oftast uttryckt i spänningsförhållandet  $R = S_{\min} / S_{\max}$ .

Den kortaste livslängden för en given spänningsväxling erhålls då medelspänningen är hög i drag, dvs  $0 < R \approx 1$ .



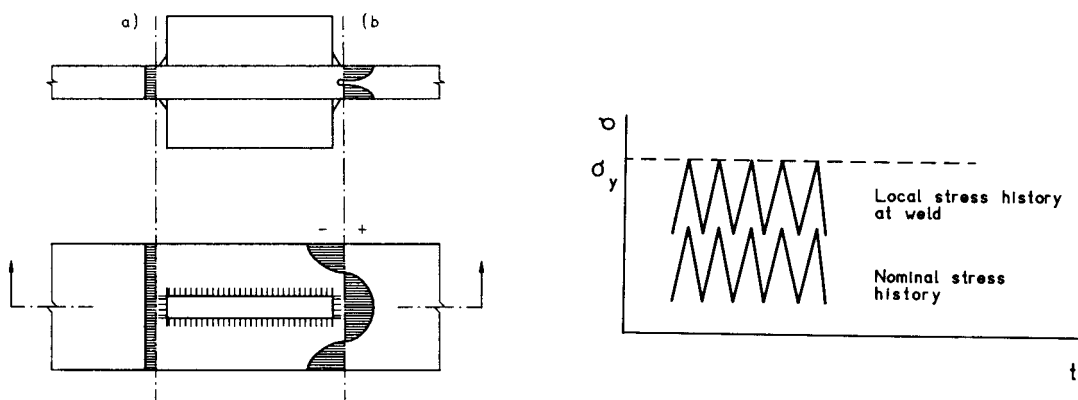
## Utmattningsprovning av svetsade konstruktioner

Alla svetsade konstruktioner innehåller efter tillverkningen restspänningar.

Dessa finns lokalt i och kring svetsen, men också i strukturen som helhet beroende på i vilken ordning den är sammansatt.

I svetsen och den närmaste värmepåverkade zonen (*heat affected zone*, HAZ) induceras vid svalningen dragspänningar upp till sträckgränsen. Detta gör att spänningsvariationerna lokalt vid svetsen kan antas ske från sträckgränsen och nedåt oberoende av de nominella spänningarnas storlek och tecken! (vilket just var den värsta situationen,  $R \approx 1$ )

SN-kurvor för svetsade konstruktioner presenteras därför normalt som R-oberoende. (Eftersom små provstycken sällan representerar ett relevant restspänningstillstånd, görs en korrektion av provdata för att simulera restspänningarna i verkliga förband)



Residual stresses (schematic).  
(a) Long range stresses. (b) Short range stresses.

Antagandet att lokala spänningsväxlingar vid svetsen alltid sträcker sig till sträckgränsen i drag är åtminstone för fartyg, konservativt. Enstaka höga överlastar leder till spänningsomlagringar (*shake out*) som sänker medelspänningen i svetsen. Ett fartyg som möter hårt väder på jungfruturen har alltså betydligt bättre förutsättningar än ett fartyg som går i jämdåligt väder!

(Det finns flera 'artificiella' sätt att skapa lokala tryckspänningar i kritiska punkter, t ex coining, pitting m fl., men för stora fartyg i stål är dessa knappast aktuella).

## Utmattningsprovning av svetsförband

För att kunna bedöma utmattningshållfastheten för ett verkligt förband på konstruktionsstadiet används SN- provdata för lokala förbandstyper grupperade efter svetstyp (ev process) och typ av belastning, i klasser för vilka gemensamma SN-data anses gälla.

SN-kurvorna refererar här till nominella spänningar i provstycket, vilket i verkligheten motsvarar lokala spänningar i konstruktionen.

De lokala geometriska spänningskoncentrationerna i den verkliga strukturen måste alltså tas i beaktande medan svetsens egen geometri ofta är 'inbakad' i SN-data.

Valet av klasser är strategiskt eftersom det bestämmer hur detaljerad information resp. hur generellt användbar information som kan erhållas ur proven.

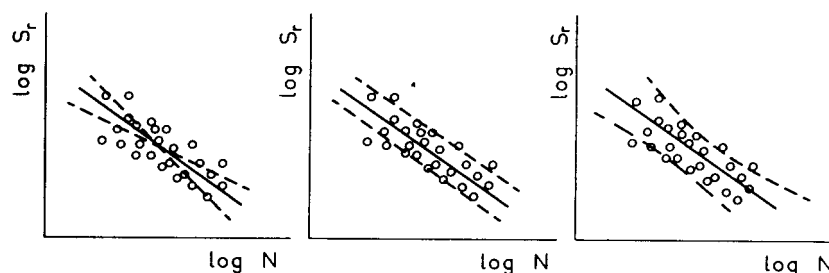
### Många klasser ger:

- + högre precision (mindre spridning)
- kräver många prov  
(mindre generellt användbara prov)

### Få klasser ger:

- + mera generellt användbara data  
(baserat på ett stort antal prov)
- större spridning i SN-data

Den 'naturliga' spridningen av provdata är dock även för 'identiska' provstycken stor. Detta gör att det knappast är motiverat att göra en alltför noggrann klassning på olika förbandstyper.



A collection of SN data with regression line showing uncertainty in slope (a), uncertainty in abscissa intercept (b), and total uncertainty (c) (schematic).

## Exempel på detaljerad klassning av utmattningsdata för fartygsdetaljer

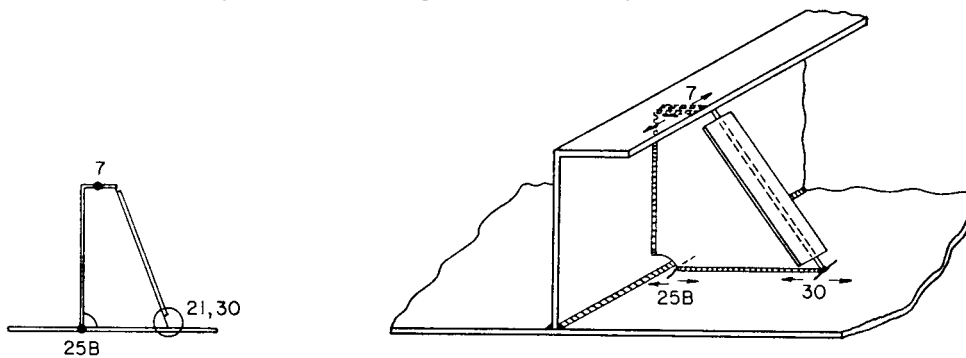
*Fatigue Characterization of Fabricated Ship Details for Design*  
by W. H. Munse et al, SSC-318, 1983

redovisar en mycket omfattande och detaljerad sammanställning av utmattningsprovning för fartygsdetaljer.

SN-data redovisas för ett 70-tal typförband tillämpliga för olika delar av verkliga fartygs konstruktionsdetaljer.

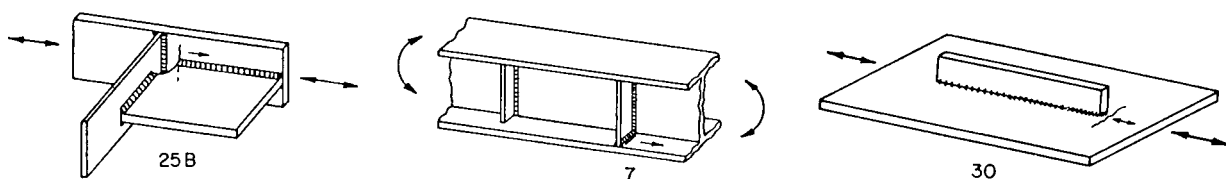
I ett stort antal redovisade exempel (ca 600!) klassificeras verkliga konstruktionsförband i 12 familjer med varianter

Exemplet nedan är hämtat ur  
*Family 2, Tripping Brackets, Type C6 :*

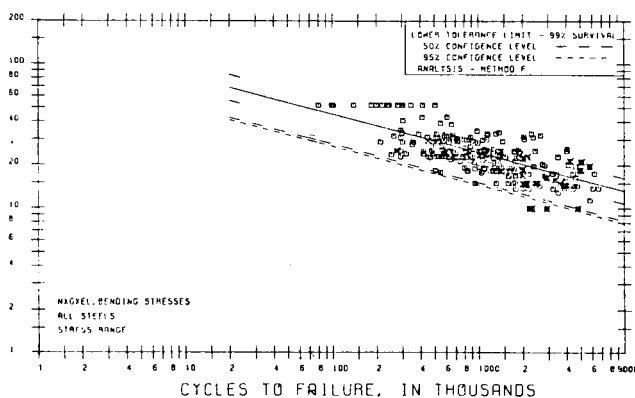


(d) Tripping Bracket 2C6

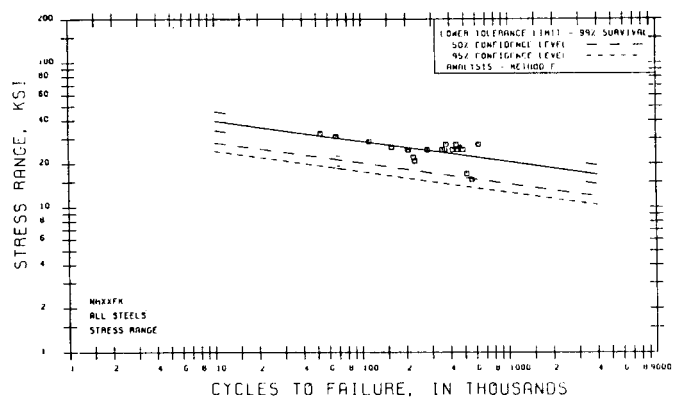
(e) Possible Fatigue Critical Location In Tripping Bracket 2C6



(f) Local Fatigue Details Number 7 and 25B



Detail No. 7(B)



Detail No. 25B

## Utmattningsregler för offshore konstruktioner

är idag i stor utsträckning baserade på de provanalyser och klassificeringar som utförts och redovisats av brittiska *Welding Institute*, t ex:

*Fatigue Design Rules for Welded Steel Joints*

*T. R. Gurney, The Welding Institute Bulletin, Vol 17, No 5 1976*

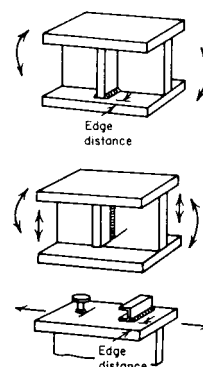
Dessa SN-data används bl a av BS 5400, British Dept of Energy, Norwegian Petroleum Directorate, DnV m fl.

Olika svetsförband är här sammanförda i ett fåtal klasser av SN-kurvor (8-10 st), beroende på förbandstyp, svetsriktning, geometri, etc.

### En sammanställning av klasserna återges i SSD sid 94-99

Exempel:

- |   |                   |   |
|---|-------------------|---|
| <p><b>6.1</b> Parent metal at the toe of a weld connecting a stiffener, diaphragm, etc. to a girder flange</p> <p>(a) Edge distance <math>\geq 10</math> mm (see joint Type 4.2)</p> <p>(b) Edge distance <math>&lt; 10</math> mm</p> | <p>F</p> <p>G</p> | <p>Edge distance refers to distance from a free, i.e. unwelded, edge. In this example, therefore, it is not relevant as far as the (welded) edge of the web plate is concerned. For reason for edge distance see note on joint Type 2</p> |
| <p><b>6.2</b> Parent metal at the end of a weld connecting a stiffener, diaphragm, etc. to a girder web in a region of combined bending and shear</p>   | <p>E</p>          | <p>This classification includes all attachments to girder webs</p>  |
| <p><b>6.3</b> Parent metal adjacent to welded shear connectors</p> <p>(a) Edge distance <math>\geq 10</math> mm</p> <p>(b) Edge distance <math>&lt; 10</math> mm (see Type 4.2)</p>   | <p>F</p> <p>G</p> | <p>Edge distance</p>  |



SN-kurvorna beskrivs av ett linjärt samband mellan  $\log(\Delta\sigma)$  och  $\log(N)$ . För medelvärdet av sammanställda data gäller:

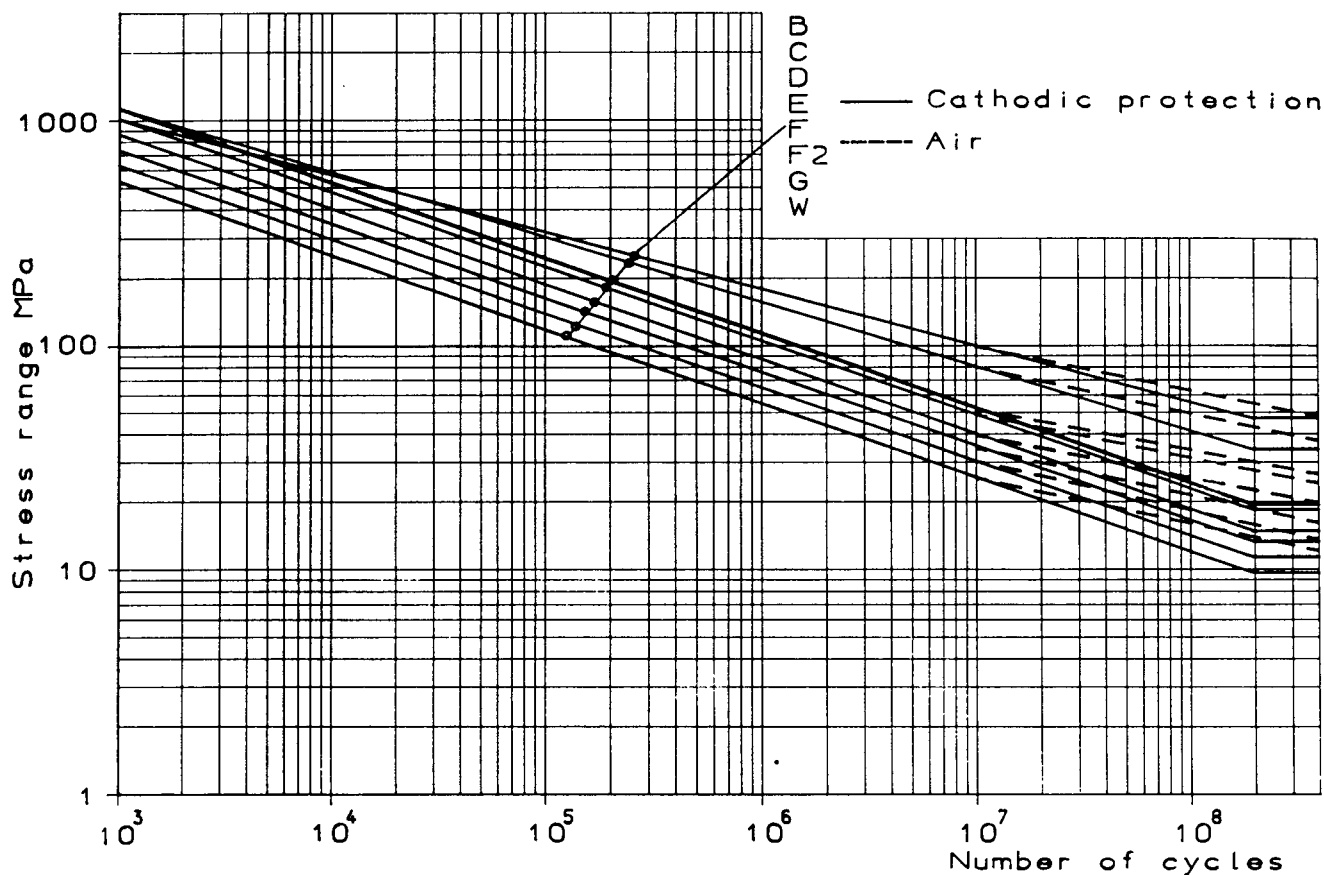
$$\log(N) = \log(a) - m \cdot \log(\Delta\sigma)$$

För designändamål används den spänningsnivå som svarar mot två standardavvikelser ( $\log(s)$ ) från medelkurvan motsvarande 94,5% konfidensgräns, 2,3% sannolikhet för brott:

$$\log(N) = \log(a) - 2 \cdot \log(s) - m \cdot \log(\Delta\sigma) = \log\left(\frac{-}{a}\right) - m \cdot \log(\Delta\sigma)$$

(Kurvorna gäller för plättjocklekar  $t < 22$  mm, annars korr!)

## Standardkurvor för utmattningsdimensionering av svetsförband (Motsvarande SSD Figure 3.13 och Table 3.4)



For joints exposed to sea water and adequately cathodically protected, a cut-off level  $S_0$  is introduced at  $2 \cdot 10^8$  cycles, Table 11.2 and Fig. 11.3. It is assumed that stress range levels below this limit do not contribute to fatigue damage. It should be noted that the effectiveness of cathodic protection in relation to fatigue has not been proved for structural steels with yield strengths larger than 400 MPa.

Table 11.2 Details of basic SN-curves – Sea water and cathodic protection.

Class	$\log a$	$\log s$	$\log \bar{a}$	$m$	$S_0$ <sup>1)</sup> (MPa)
B	15.3697	0.1821	15.01	4.0	48
C	14.0342	0.2041	13.63	3.5	33
D	12.6007	0.2095	12.18	3.0	20
E	12.5169	0.2509	12.02	3.0	18
F	12.2370	0.2183	11.80	3.0	15
F2	12.0900	0.2279	11.63	3.0	13
G	11.7525	0.1793	11.39	3.0	11
W	11.5662	0.1846	11.20	3.0	10
T	12.6606	0.2484	12.16	3.0	19

<sup>1)</sup>  $S_0$  is cut-off level at  $N = 2 \cdot 10^8$  cycles.

## Beräkning av utmattning livslängd vid varierande belastningar

Vid dynamisk belastning med konstant amplitud kan livslängden (medel- eller designvärde) direkt avläsas / beräknas ur SN-kurvan. (Observera att spänningsviddens definition normalt är lokal plåtspänning, men för bärande svetsar, svetsspänningarna  $\Delta\sigma$  eller  $\Delta\tau$ ).

För varierande spänningsamplituder (spektrumbelastningar) används delskad modeller av vilka den vanligaste är linjär delskadesumma enl Miner - Palmgren.

$$D = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N_i}$$

D	=	kumulativ delskada
k	=	antal spänningsnivåer $\Delta\sigma_i$
$n_i$	=	antal cykler vid $\Delta\sigma_i$
$N_i$	=	antal cykler till brott vid $\Delta\sigma_i$

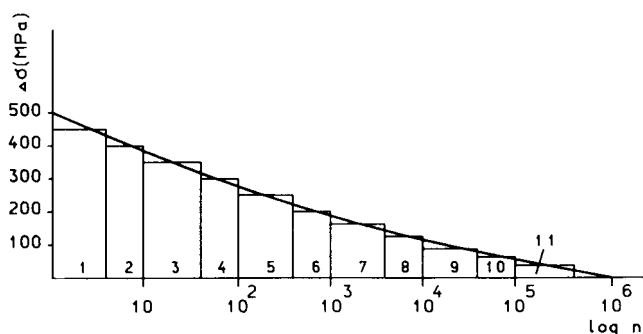
Metoden är grov då den inte tar hänsyn till sekvensen av lastväxlingarna. (Det finns mera sofistikerade modeller men det har inte bevisats att dessa ger märkbart bättre förutsägelser för stokastiska belastningar av den typ som fartygskonstruktioner utsätts för).

Enligt den kumulativa delskadeteorin ska livslängden vara slut då  $D = 1$ . Detta innebär för ett prov normalt att sprickan har propagerat genom plattjockleken.

Som designkriterium används ofta  $D < \eta$  där  $\eta$  är en utnyttjandefaktor i området  $0,2 < \eta < 1$  beroende på:

- åtkomlighet för inspektion
- effekter av en skada
- mm

För designändamål utnyttjas dessutom som tidigare nämnts en SN-kurva med 'inbyggd säkerhet' sådan att flertalet förband (97,7%) får en betydligt längre livslängd än den man beräknar.



Delskadesumma kan genomföras genom att dela in långtidsfördelningen av spänningarna (*hot-spot*) i ett (stort) antal block för vilka delskadan beräknas och summeras.

## Livslängdsberäkningar i direkt form

Om frekvensfunktionen för spänningsväxlingarna är känd kan delskadesummationen skrivas på integralform:

$$D = \int_0^{\infty} \frac{n_0 \cdot f(\Delta\sigma)}{N(\Delta\sigma)} d\Delta\sigma \quad n_0 = \text{totala antalet cykler}$$

Långtidsfördelningen av väginducerade spänningar beskrivs ofta väl av en Weibullfördelning (bildas genom att summera spänningsgensvaret i ett stort antal korttidsfördelningar definierade av vägstatistik för det område fartyget trafikerar).

$$Q_{LT}(\Delta\sigma) = e^{-\left(\frac{\Delta\sigma}{B}\right)^h} = 1 - F(\Delta\sigma) \quad f(\Delta\sigma) = \frac{h}{B} \cdot \left(\frac{\Delta\sigma}{B}\right)^{h-1} \cdot e^{-\left(\frac{\Delta\sigma}{B}\right)^h}$$

SN-kurvan (utan hänsyn till utmattningsgränsen  $S_0$ ) skrivs:

$$N(\Delta\sigma) = a \cdot \Delta\sigma^{-m}$$

vilket genom transformation ger:

$$t = \left(\frac{\Delta\sigma}{B}\right)^h \quad \boxed{D = \frac{n_0}{a} \cdot B^m \cdot \Gamma\left(1 + \frac{m}{h}\right)} \quad \begin{array}{l} \text{(OBS} \\ \text{För 'design-kurvor'} \\ \text{används i stället för } a, \\ \text{a)} \end{array}$$

där Gamma-funktionen är definierad

$$\Gamma\left(1 + \frac{m}{h}\right) = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{\left(\frac{m}{h}\right)} dt$$

Ett numeriskt värde på Gammafunktionen kan - för de värden på  $m$  och  $h$  som blir aktuella för fartygsstål och väginducerade spänningar ( $m = 3-4$ ,  $h = 0,8-1,2$ ) - erhållas ur följande 'privata' regressionsanalys:

$$\Gamma\left(1 + \frac{m}{h}\right) = 10^{0.2934 \cdot \left(\frac{m}{h} - 1\right)^{1.4107}}$$



## Livslängdsberäkningar i direkt form ur diagram

Fartyg dimensioneras normalt för att stå emot ca  $10^8$  våginducerade lastväxlingar under livstiden, detta motsvarar ca 20 år i vägsystem med medelperiod 8 s.

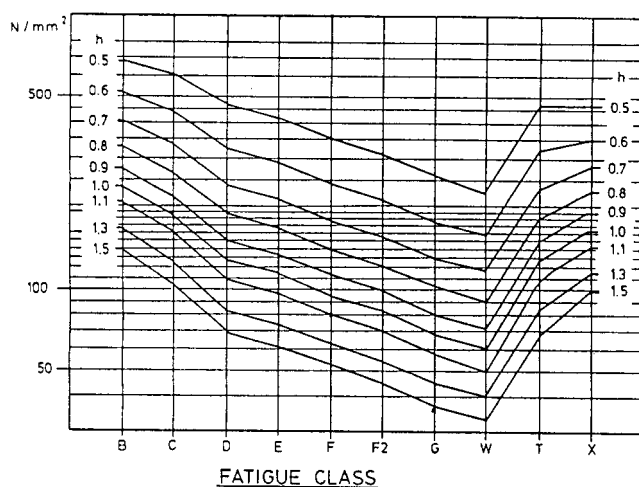
Kravet på utmattningshållfastheten  $D < 1$  kan därför alternativt uttryckas som ett krav på max dynamisk spänningsvidd  $\Delta\sigma_{20}$  eller spänningsamplitud  $\sigma_{20} = \Delta\sigma_{20} / 2$  under 20 år. (Förutsätter att långtidsfördelningens form är känd.)

$$Q = e^{-\left(\frac{\Delta\sigma_{20}}{B}\right)^h} = 10^{-8} \quad \text{ger} \quad B = \frac{\Delta\sigma_{20}}{\ln(10^8)^{\frac{1}{h}}}$$

och enligt tidigare med delskadesumman  $D = 1$ :

$$D = 1 = \frac{10^8}{a} \cdot B^m \cdot \Gamma\left(1 + \frac{m}{h}\right) \quad \text{ger} \quad B = \left(\frac{a \cdot 10^{-8}}{\Gamma\left(1 + \frac{m}{h}\right)}\right)^{\frac{1}{m}}$$

tillsammans kan vi ur dessa uttryck lösa max tillåten spänningsvidd som funktion av svetsklass (a,m) och långtidsfördelningens kurvatur (h):



$$\Delta\sigma_{20} = \ln(10^8)^{\frac{1}{h}} \cdot \left(\frac{a \cdot 10^{-8}}{\Gamma\left(1 + \frac{m}{h}\right)}\right)^{\frac{1}{m}}$$

Diagrammet här intill ur DnV Class.Notes för offshore konstruktioner visar tillåten max dynamisk spänningsamplitud för olika svetsklasser och olika långtidsfördelningsparametrar

## Långtidsfördelning av spänningar

Som nämnts tidigare kan långtidfördelningar av (linjära) våginducerade belastningar beskrivas av en Weibull-fördelning. De lokala spänningsnivåerna och fördelningens kurvatur (h-parametern) kan bli mycket komplicerad att beräkna direkt då spänningarna uppstår som följd av en kombination av lokala belastningar (på olika nivåer och med olika ursprung) och globala belastningar på skrovbalken.

För en lokal 'hot-spot' t ex en bricktå eller ett genomströmningshål i en vägare, där den kritiska sprickdrivande spänningsriktningen är väldefinierad i en viss punkt, kan en fullständig beräkning av spänningarnas långtidsfördelning genomföras i följande steg:

### Transferfunktioner

Beräkning av lokala spänningsvariationer för olika belastningskomponenter i regelbundna vågor med olika vägfrekvens och riktning (ev även olika farter).

### Spektrumoperatorer

Beräkning av fördelningsfunktionen för den kombinerade spänningen i olika oregelbundna korttids-sjötillstånd definierade av medelperiod och huvudriktning.

### Långtidsfördelningar

Beräkning av långtidsfördelningen genom att summera korttidsfördelningarna med hänsyn till vägstatistik - dvs statistik över signifikanta våghöjder, medelperioder och riktningar - över lång tid för de fartvatten fartyget kommer att trafikera.

Förutsättningen för att man ska kunna utgå från spänningsgensvar i regelbundna vågor och superponera dessa till gensvar i oregelbundna sjötillstånd är att de dynamiska spänningsvariationerna är linjära med avseende på våghöjden. Detta gäller med god noggrannhet för botten, däck och interna strukturer, men sämre för sidobordläggningen nära medelvattenlinjen.

## Transferfunktioner för spänningsvariationer i regelbundna vågor

Den lokala spänningsvariationen vid en viss punkt  $i$  i skrovet beräknas som en linjärkombination av spänningar från olika belastningskomponenter:

$$\sigma_{ci} = \sigma_{gi} + \sigma_{pi} + \sigma_{mi} \quad \text{med}$$

$$\sigma_{gi} = C_{Mxi} \cdot M_{xi} + C_{Myi} \cdot M_{yi} + C_{Mzi} \cdot M_{zi}$$

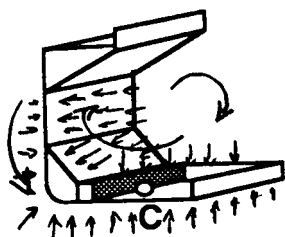
$$\sigma_{pi} = \sum_j (C_{pij} \cdot P_j)$$

$$\sigma_{mi} = \sum_k (C_{mxik} \cdot F_{mxk} + C_{myik} \cdot F_{myk} + C_{mzik} \cdot F_{mzk})$$

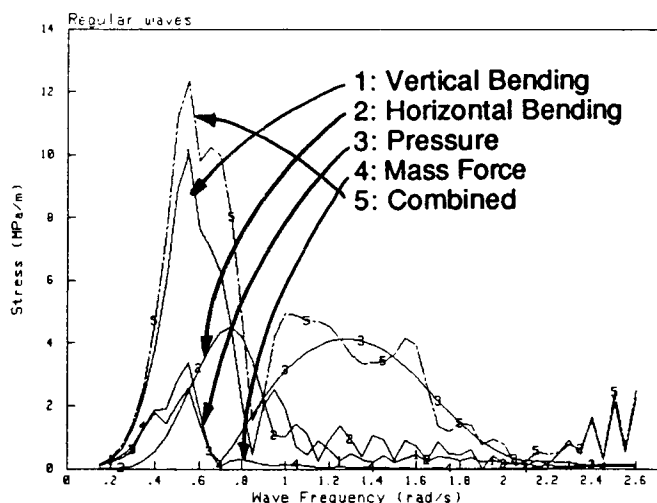
Belastningskomponenterna är:

- $M_{xi}$ ,  $M_{yi}$ ,  $M_{zi}$ , globala snittmoment (eller tvärkrafter)
- $p_j$ , hydrodynamiska tryckvariationer på delytor  $j$  runt spänningspunkten  $i$
- $F_{mxk}$ ,  $F_{myk}$ ,  $F_{mzk}$ , masströghetskrafter i tre huvudriktningar i ett antal punkter  $k$  runt spänningspunkten  $i$

**-135°**



Bottom Side Girders, Position C Hold 4  
Normal Stress Components



$C_{.i}$  beskriver förhållandet mellan spänningar i punkten  $i$  och en viss belastningskomponent och kan beräknas med statisk strukturanalys t ex FEM.

Då de olika belastningskomponenterna varierar harmoniskt med vågmötandefrekvensen,  $\omega_e$ , i regelbundna vågor kommer också den kombinerade spänningen att variera harmoniskt med  $\omega_e$ .

Spänningsamplituden blir beroende av komponenternas belopp och inbördes fasförskjutning.

Transferfunktionen,  $T_{\sigma}(\omega)$ , beskriver förhållandet spänningsamplitud/vågamplitud som funktion av vågfrekvensen.

## Spektrumoperatorer för spänningsvariationer i oregelbundna sjötilstånd

Ett oregelbundet sjötilstånd beskrivs av vågspektrumet  $S_W(\omega)$  ofta sammanfattat av de två statistiska parametrarna signifikant våghöjd,  $H_s$ , och medelperiod  $T_Z$ :

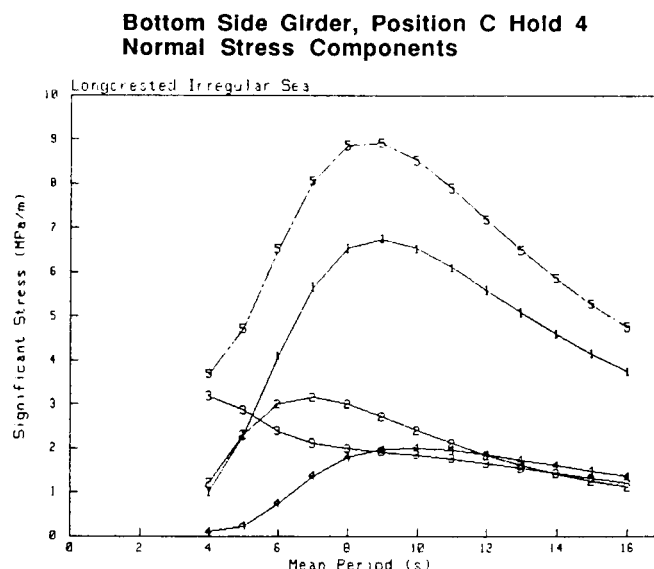
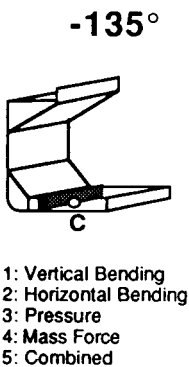
$$H_s = 4.0 \cdot \sqrt{\int_0^\infty S_W(\omega) d\omega} \quad T_Z = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{\int_0^\infty S_W(\omega) d\omega}{\int_0^\infty \omega^2 \cdot S_W(\omega) d\omega}}$$

Analogt med vågfördelningen kan man definiera ett spänningsspektrum  $S_\sigma(\omega)$  och en signifikant spänningsvariation  $\Delta\sigma_s$ .

$$S_\sigma(\omega) = T_\sigma(\omega)^2 \cdot S_W(\omega) \quad \Delta\sigma_s = 4.0 \cdot \sqrt{\int_0^\infty S_\sigma(\omega) d\omega}$$

I ett (nägorlunda smalbandigt) spänningsspektrum följer den statistiska fördelningen av spänningarna en Rayleigh-fördelning där sannolikheten att en viss spänningsvidd överskrids kan skrivas

$$Q(\Delta\sigma) = e^{-2 \cdot \left(\frac{\Delta\sigma}{\Delta\sigma_s}\right)^2}$$



Spektrumoperatorn beskriver förhållandet (signifikant spänningsvidd)/ (signifikant våghöjd) och är för linjära gensvar beroende av fartygets fart, riktning mot vågorna, vågsystemets medelperiod mm, men oberoende av våghöjden.

## Långtidsfördelning av spänningsvariationer

Sannolikhetsfördelningen av spänningsvariationer över lång tid (fartygets livstid) erhålls genom att summera korttidsfördelningarna för alla tänkbara kombinationer av vågspektrum, riktningar, lastfall och farter, viktade med den relativa sannolikhet vilken kombinationerna kan förväntas uppträda (se SSD 4.6.4).

$$Q_{LT}(\Delta\sigma) = \frac{\sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \sum_m n_{ijklm} \cdot p(H_{si}, T_{zj}) \cdot p(\beta_k) \cdot p(LC_l) \cdot p(V_m) \cdot Q_{ijklm}(\Delta\sigma)}{\sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \sum_m n_{ijklm} \cdot p(H_{si}, T_{zj}) \cdot p(\beta_k) \cdot p(LC_l) \cdot p(V_m)}$$

$Q_{LT}(\Delta\sigma)$  är sannolikheten för att överskrida  $\Delta\sigma$  över lång tid

$n_{ijklm}$  är antal spänningscykler per s för ett visst korttidsgensvar =  $1/T_{z\sigma}$

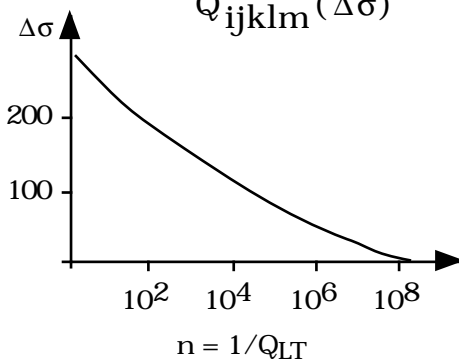
$p(H_{si}, T_{zj})$  är sannolikheten för en viss kombination i,j av signifikant våghöjd och medelperiod (erhålls ur vägstatistik över lång tid)

$p(\beta_k)$  är sannolikheten för en viss relativ riktning, k, mot vågorna

$p(LC_l)$  är sannolikheten för ett visst lastfall, l

$p(V_m)$  är sannolikheten för en viss fart, m

$Q_{ijklm}(\Delta\sigma)$  är sannolikheten för att överskrida  $\Delta\sigma$  i den aktuella korttids-konditionen, i,j,k,l,m



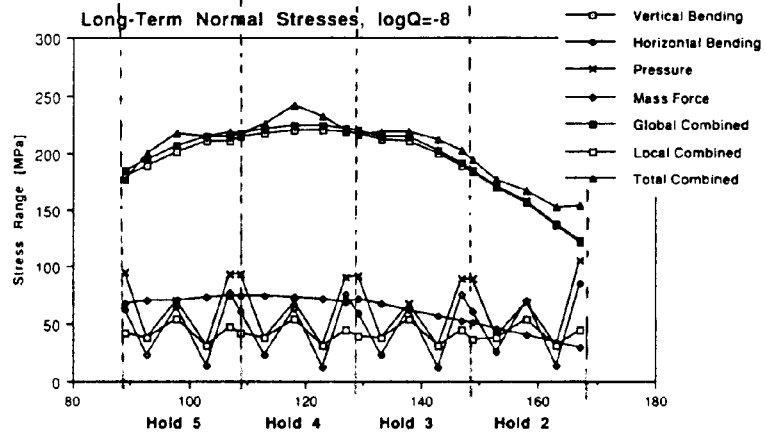
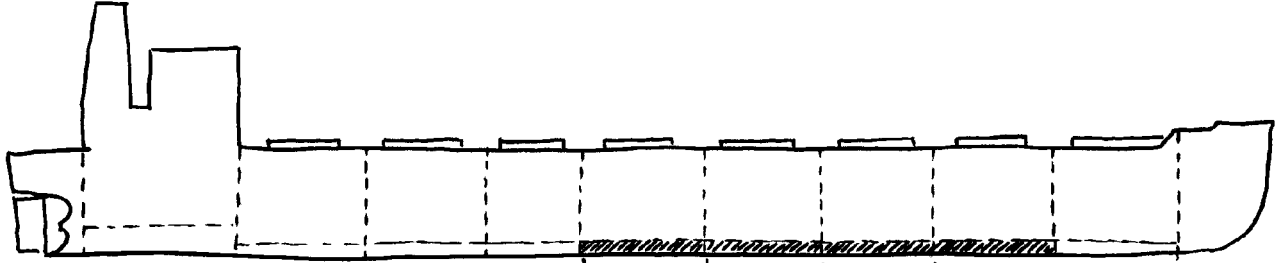
Överskridande-sannolikheten beräknad på detta sätt för ett antal olika nivåer  $\Delta\sigma$  kan approximeras av en Weibull-fördelning

$$Q_{LT}(\Delta\sigma) = e^{-\left(\frac{\Delta\sigma}{B}\right)^h}$$

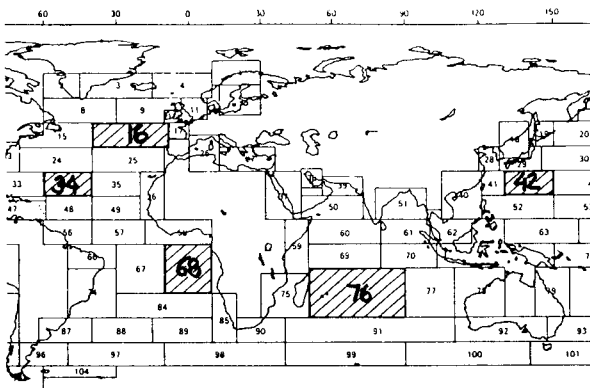
Beräkningsarbetet blir dock mycket stort med denna 'direkta' metod, och varje enskild skrovdetalj som ska studeras måste i princip genomlöpa hela proceduren. I praktisk dimensionering är man därför hänvisad till förenklade 'design'-uttryck för parametrarna i långtidsfördelningen.

## Exempel på långtidsfördelningar

Maximala nominella normalspänningar  $\Delta\sigma_{20}$  i bottenvägare vid bordläggningsplåten för ett OBO-fartyg i homogen lastkondition:



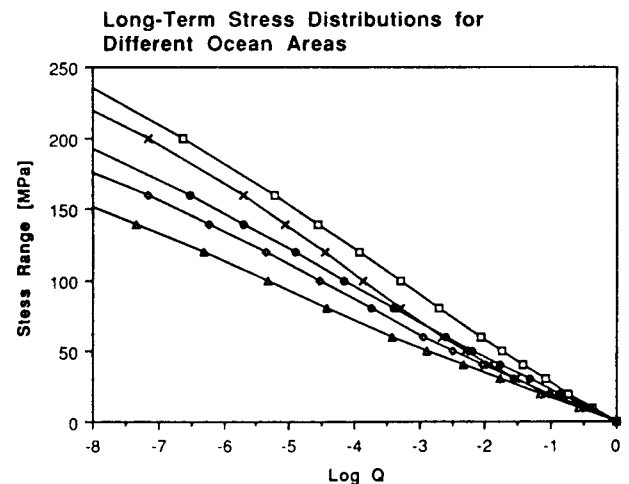
Inflytande från vägstatistik för olika havsområden:



- Area 16
- ◆ Area 34
- × Area 42
- ▲ Area 68
- Area 76

PERCENTAGE OF OBS = 100.00%  
(INCLUDING 1.47% DIRECTION UNKNOWN)

TOTAL	3	28	124	249	271	186	90	34	10	3	1000	
>14	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	
13-14	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	
12-13	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	
11-12	-	-	-	-	-	-	1	-	-	-	2	
10-11	-	-	-	-	-	1	1	1	-	-	3	
9-10	-	-	-	-	1	2	1	1	-	-	6	
8-9	-	-	-	1	2	3	3	2	1	-	11	
7-8	-	-	-	1	4	6	5	3	1	-	20	
6-7	-	-	1	3	9	11	8	4	1	-	37	
5-6	-	-	1	9	19	20	13	6	2	-	70	
4-5	-	-	4	21	37	34	18	7	2	-	124	
3-4	-	1	13	45	64	47	21	6	2	-	197	
2-3	-	4	31	77	80	44	15	4	1	-	255	
1-2	-	11	53	78	51	18	4	1	-	-	216	
0-1	-	2	13	22	14	5	1	-	-	-	57	
	4-5	6-7	8-9	10-11	12-13	TOTAL						
	<4	5-6	7-8	9-10	11-12	>13						
	ZERO CROSSING PERIOD (s)											



## Utmattningsdimensionering i klassregler för fartyg

Utmattningslivslängden i ett lokalt skrovförband styrs i huvudsak av:

- Den nominella dynamiska (våginducerade) spänningsnivån i förbandet
- De lokala geometriska spänningskoncentrationerna
- Kvaliteten på svetsar, graden av korrosion

Samtliga dessa faktorer är reglerade i de vanliga (statiska) klassreglerna och de kan därför sägas innefatta en erfarenhetsbaserad koppling till utmattningsproblematiken.

I takt med att utvecklingen gått mot allt mer direkt dimensionering och ett högre materialutnyttjande har det dock uppstått behov av att kunna kontrollera och värdera olika konstruktionslösningar explicit map utmattning. Anvisningar, rekommendationer och i vissa fall regler för utmattningsdimensionering har därför tagits fram av de flesta större klassningssällskap under det senaste decenniet.

Pga den enorma komplexiteten som noggranna direkta utmattningsberäkningar ger upphov till innehåller klassens anvisningar vanligen möjlighet till förenklade beräkningar av belastningarna (långtidsfördelningen av lokala spänningar). Tyvärr har de olika sällskapen valt olika angreppssätt och man är långt ifrån någon enhetlig standard.

## SN-kurvor för dimensionering

Flera klassningssällskap använder de tidigare beskrivna *8 joint classes* från *Welding Institute* som bas för dimensionering, medan t ex GL har en egen familj av kurvor för olika svetsförband som dessutom kan justeras map material, medelspänning och ev efterbehandling av svetsarna. DNV har i princip en enda SN-kurva (eg fyra, för svets/basmaterial resp korrosiv/icke korrosiv miljö). Inflytandet från olika svetsförband bakas in i spänningsbeskrivningen genom separata SCF (spänningskoncentrationsfaktorer) för svetsgeometri resp förbandsgeometri.

## Belastningar för dimensionering

I de flesta förenklade metoder utgår man från en Weibullfördelning där spänningsnivån vid en viss sannolikhet bestäms från enkla kvasistatiska lastfall och där kurvaturen (h) ges approximativt för olika förband och fartygstyper. Kriteria kan vara formulerat som tillåten spänningsnivå eller som maximalt tillåten delskadesumma.

## Introduktion

Det huvudsakliga syftet med detta kursavsnitt är att ge en allmän inblick i ämnesområdet probabilistisk dimensionering. Målsättningen är att ge:

- Förståelse för varför probabilistisk dimensionering kan vara att föredra framför traditionella dimensioneringsmetoder.
- En introduktion och övergripande förståelse för de matematiska verktygen som står till buds.

Dessa föreläsningsanteckningar bygger i stort på kompendiet *Probabilistisk dimensionering, Ulf Björkenstam, CTH 1992* (varifrån ett flertal figurer har lånats) och på Mikael Palmquist förarbete i samband med att kursavsnittet introducerades i denna kurs.

## Deterministisk kontra probabilistisk dimensionering

I traditionell (deterministisk) dimensionering av strukturer antas att varje inverkan storhet (tex materialegenskaper, dimensioner, last) kan representeras av ett värde. Storheterna är bestämda. För att nå "tillräcklig" säkerhet hos strukturen använder man olika former av säkerhetsfaktorer, vilket beror på att det finns osäkerheter och fysikaliska variationer inbyggda i storheterna.

Ett exempel på en sådan osäkerhet är böjmotståndet för en skrovbalk, medan ett exempel på fysikaliska variationer är det väginducerade böjmomentet som kommer att verka på skrovbalken under fartygets livstid.

Den största bristen med deterministisk dimensionering är ganska uppenbar; den säger inte något om hur säker strukturen är. Risker för haveri är inte kvantifierade och kan inte värderas i förhållande till säkerhetsfaktorernas storlek, olika konservativa antaganden etc.

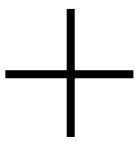
En inte ovanlig missuppfattning är att absolut säkerhet kan uppnås, så är givetvis inte fallet (det skulle kräva oändliga resurser). Vi måste inom alla områden acceptera en viss risk, vars nivå rimligen bör bestämmas i relation till konsekvenserna av haveri, kostnader etc. För att kunna ge en konstruktion ett visst mått av säkerhet måste vi använda probabilistiska metoder.



## Stokastiska variabler

Probabilistisk dimensionering av en struktur bygger på att de inverkan storheterna representeras av stokastiska variabler (istället för av deterministiska värden). Dessa stokastiska variabler beskrivs av sannolikhetsfunktioner bestämda av ett antal parametrar (tex en normalfördelning med medelvärde och standardavvikelse som parametrar).

Fördelar med probabilistisk dimensionering i förhållande till deterministisk dimensionering:



- Ger ett kvantitativt mått på säkerheten
- Ger möjlighet att höja den totala säkerheten på ett kostnadseffektivt sätt
- Ger mer konsistenta säkerhetsnivåer
- Ger en bättre attityd, skapar säkerhetstänkande

Nackdelar/problem:



- Praktiskt mer komplicerat, kräver statistisk kunskap och erfarenhet
- Relativt sett svårare att införa i reglementen för konstruktion
- Osäkerheten i den statistiska beskrivningen av olika variabler är ofta stor

## Probabilistisk dimensionering - grundidé

Antag att en strukturs bärförmåga  $R$  (*resistance*) och påkänning  $S$  (*stress*) är stokastiska variabler som kan beskrivas statistiskt. Vi inför säkerhetsmarginalen som  $M=R-S$ , vilken således också är en stokastisk variabel. För  $m>0$  anses strukturen säker, medan  $m<0$  ger haveri ( $m$  betecknar utfall av  $M$ ). Observera att både  $R$  och  $S$  måste vara uttryckta i samma enhet.

Sannolikheten för haveri (*probability of failure*)  $P_f$

kan skrivas:

$$P_f = P(R - S \leq 0) = P(M \leq 0) = F_M(0)$$

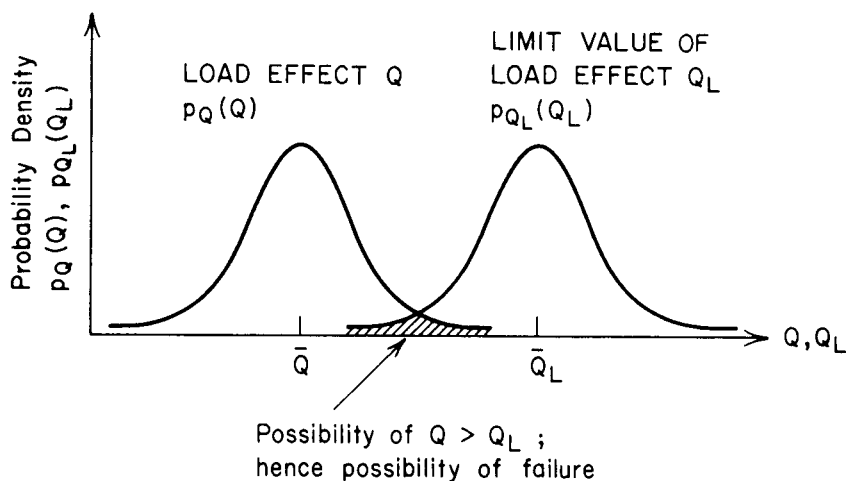
Tillförlitligheten (*reliability*) beskrivs av den komplementära sannolikheten:

$$P_r = 1 - P_f = 1 - F_M(0)$$

## Sannolikheten för haveri

### Observera !

Sannolikheten för haveri är inte lika med den gemensamma arean av  $f_S$  och  $f_R$ .  
Däremot utgår man definitionsmässigt från att ett haveri bara kan uppträda inom den gemensamma arean.



Ett haveri inträffar när bärförmågan underskrider belastningen. Sannolikheten för haveri kan således beskrivas som den samtidiga sannolikheten att belastningen har ett visst värde och att bärförmågan är lägre än detta värde, integrerat över alla tänkbara värden på belastningar:

$$P_f = \int_{-\infty}^{\infty} f_S(x) \cdot F_R(x) \, dx$$

Alternativt kan sannolikheten för haveri beskrivas som den samtidiga sannolikheten att bärförmågan har ett visst värde och att belastningen är större än detta värde, integrerat över alla tänkbara värden på bärförmågan:

$$P_f = \int_{-\infty}^{\infty} f_R(x) \cdot (1 - F_S(x)) \, dx$$

Definitionen av haveri är inte entydig. Dess innebörd bör ses i en vidare bemärkelse och snarare tolkas som begränsande händelse (*limit state*). En enskild struktur kan ha ett flertal sådana "limit states" vilka modelleras på olika sätt (tex böjning av en balk där plasticering pga drag i en fläns respektive buckling pga tryck i den andra kan utgöra två "limit states").

Dessutom är sannolikheten för haveri vanligen kopplad till exponeringstiden genom antalet belastningar och genom ev försämring av strukturens bärförmåga. Uttrycken ovan gäller formellt sannolikheten för en enskild lastpåläggning.

## Olika typer av osäkerheter

Man kan dela in de osäkerheter som finns i tre olika kategorier:

- Fysikalisk osäkerhet  
Variationer hos fysikaliska storheter såsom materialegenskaper och laster
- Statistisk osäkerhet  
Att representera en storhet med en statistisk frekvensfunktion görs på grundval av samlade data eller i vissa fall baserat på olika teorier. En sådan anpassning är alltid behäftad med ett visst mått av osäkerhet. Ofta är det tillgängliga urvalet för litet eller de teoretiska modellerna approximativa.
- Modellosäkerhet  
Modellerna för att bestämma bärförmåga och påkänning är ofta baserade på förenklade analytiska uttryck vilket inför osäkerheter. Ett exempel är materialmodeller (tex Hookes lag för linjärt elastiskt beteende).

## Grundbegrepp inom probabilistisk dimensionering:

### Säkerhetsmarginal

Säkerhetsmarginalen (*safety margin*)  $M=R-S$ , där  $R$  är bärförmågan och där  $S$  är påkänningen, är en stokastisk variabel som utgör ett mått på säkerheten. Haveri inträffar då påkänningen är större än bärförmågan, dvs då  $m < 0$ . Säkerhetsmarginalens enhet spelar ingen roll eftersom den enbart används för att beskriva sannolikheten för haveri.

### Säkerhetsfaktor

Säkerhetsfaktorer (*safety factor*) är normalt förknippade med deterministisk dimensionering, t ex den procentuella andel av sträckgränsen som används vid dimensionering enligt klassreglerna för fartygsskrov. I det enklaste fallet arbetar man med en nominell säkerhetsfaktor  $\gamma_c = r/s > 1$  (*central safety factor*) eller i mera sofistikerade fall med produkten av olika delfaktorer (*partial safety factors*)  $\gamma_c = \gamma_{r_1} \gamma_{r_2} \gamma_{s_1} \gamma_{s_2}$  etc representerande de olika osäkra variablerna. Säkerhetsfaktorer på denna form är enkla att använda men ger inget kvantitativt mått på tillförlitligheten.

Naturligtvis kan man också uttrycka säkerhetsfaktorn som en stokastisk variabel  $M' = R/S$  där  $P_f = F_{M'}(1)$ .

## Primära variabler

Bärförmågan  $R$  och påkänningen  $S$  är vanligen funktioner av ett flertal variabler. Säkerhetsmarginalen  $M$  kan skrivas som en funktion av dessa:

$$M = g(X_1, X_2, \dots, X_n) = g(\mathbf{X})$$

där

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$$

är primära variabler (*basic variables*)

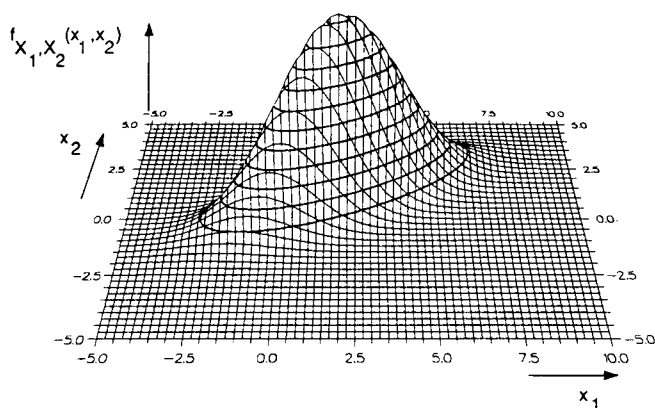
De primära variablerna är de storheter som bestämmer en strukturs styrka och last. Vissa av dessa kan ingå både i bärförmågan och påkänningen (tex dimensioner). Antalet variabler påverkar starkt arbetet/möjligheten att beräkna fördelningen av  $M$  och  $P_f$ . Generellt strävar man efter att begränsa antalet primära variabler så långt som möjligt. Variabler vars spridning förväntas ha liten inverkan på tillförlitligheten betraktas därför som deterministiska.

## Gränsytan

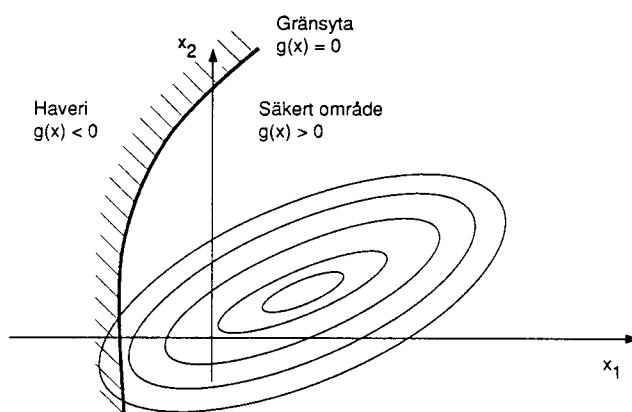
De primära variablerna spänner upp en  $n$ -dimensionell rymd i vilken utfall  $\mathbf{x}$  av den  $n$ -dimensionella stokastiska variabeln  $\mathbf{X}$  utgör en punkt. Denna rymd avdelas av en gränsyta i ett säkert område respektive ett område i vilket haveri inträffar. Det säkra området är alla kombinationer  $\mathbf{x}$  sådana att  $g(\mathbf{x}) > 0$ . Gränsytan beskrivs av funktionen:

$$g(\mathbf{X}) = 0$$

Med  $n=2$  är  $g(\mathbf{x})$  en kurva och för  $n>2$  en yta



Exempel på frekvensfunktion för en 2-dimensionell stokastisk variabel.



Nivåer för sannolika värden hos  $X_1$  och  $X_2$ .

## Tillförlitlighet

Tillförlitligheten  $P_r$  har tagits upp tidigare baserat på säkerhetsmarginalen, men den kan också relateras till funktionen  $g(\mathbf{X})$ :

$$P_r = P(g(\mathbf{X}) > 0) = \int_{\omega_r} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

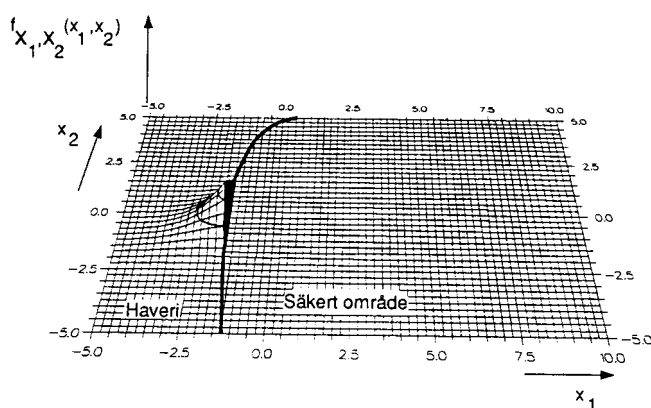
där  $\omega_r$  är det säkra området

$$\omega_r = \{\mathbf{x}: g(\mathbf{X}) > 0\}$$

Av ekvationen ovan inser man att tillförlitligheten är lika med volymen av frekvensfunktionen inom det säkra området. På samma sätt är risken för haveri lika med volymen av "haveri-området"  $\omega_f$

Om de primära variablerna  $X_1, X_2, \dots, X_n$  är oberoende kan den n-dimensionella frekvensfunktionen skrivas som

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) \cdot \dots \cdot f_{X_n}(x_n)$$



Risken för haveri.

Integralen av den flerdimensionella frekvensfunktionen blir ofta omöjlig att lösa analytiskt och svår att lösa numeriskt. Som ett alternativt (approximativt) mått på tillförlitligheten kan istället användas det kortaste avståndet från medelvärdespunkten  $(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n})$  till gränsytan  $g(\mathbf{X})=0$

## Säkerhetsindex

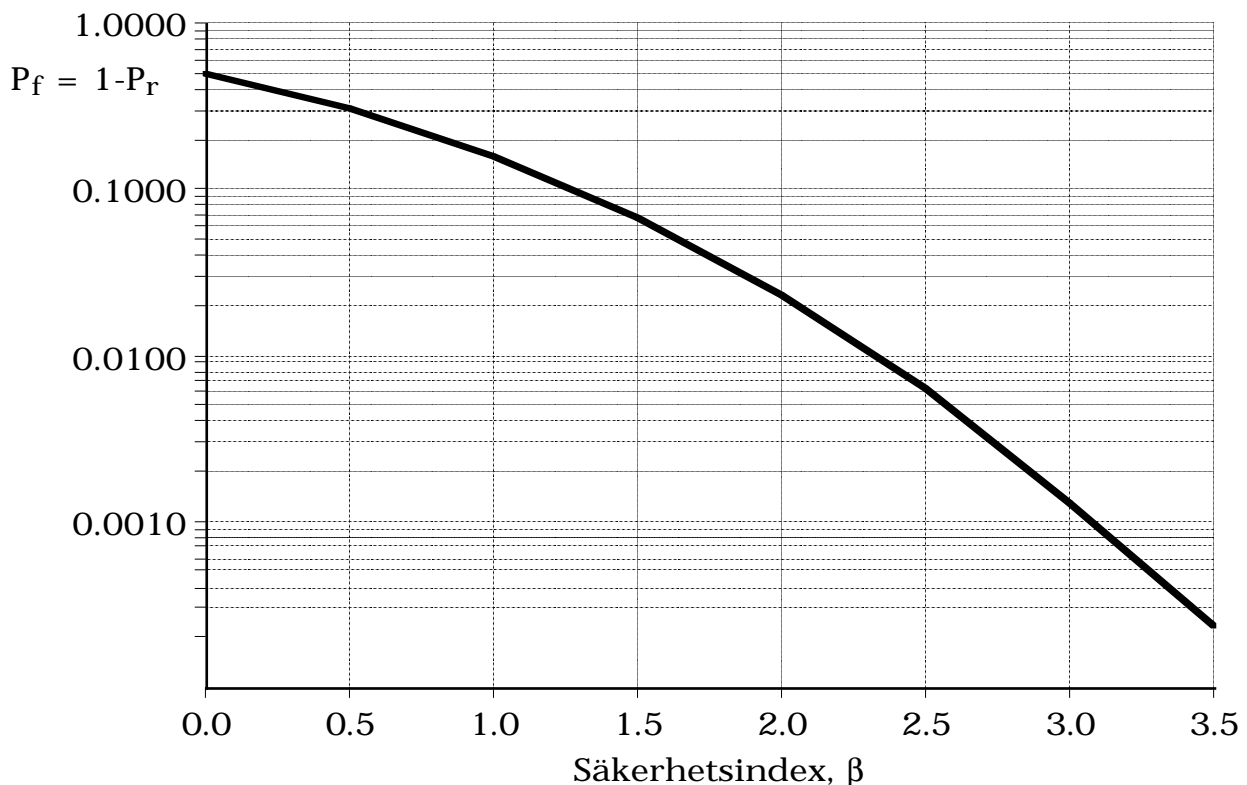
Som är ett alternativt (mera lättanvänt) mått på tillförlitligheten i strukturer används vanligen ett säkerhetsindex,  $\beta$

Den entydiga definitionen av säkerhetsindex är

$$\beta = \Phi^{-1}(P_r) = -\Phi^{-1}(P_f)$$

där  $\Phi$  är den standardiserade normalfördelningsfunktionen, dvs en normalfördelning med väntevärdet 0 och standardavvikelsen lika med 1.

Diagrammet visar sambandet mellan säkerhetsindex och sannolikheten för haveri (risken)  $P_f$  resp tillförlitligheten  $P_r$ .



Beroende på det aktuella fallet (typ av gränsyta, de primära variablernas typ av frekvensfunktioner, ev. beroende variabler etc) använder man olika varianter av säkerhetsindex. Dessa är i vissa fall identiska med och i vissa fall approximationer till  $\beta$  enl. definitionen ovan.

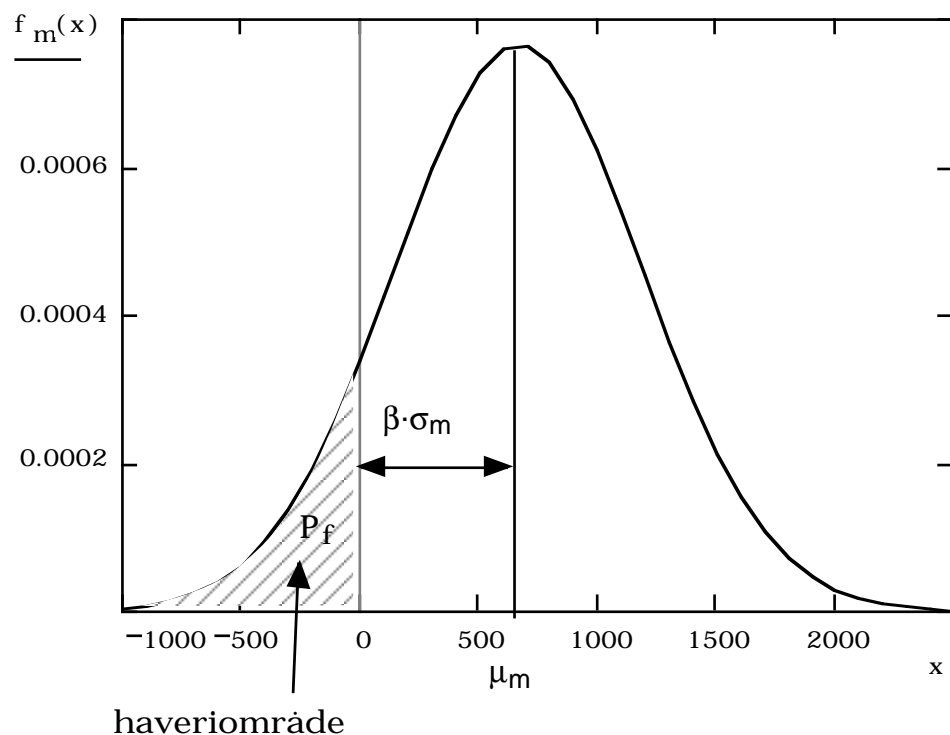
## Säkerhetsindex vid normalfördelad säkerhetsmarginal M

Om den stokastiska variabeln M är normalfördelad kan säkerhetsindex definieras ur:

$$\beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M}$$

där  $\mu_M$  är medelvärdet och  $\sigma_M$  standardavvikelsen.

Geometriskt kan detta tolkas som avståndet mellan gränsytan och medelvärdet (1-dimensionellt)



Metoder för beräkning av tillförlitlighet handlar ofta om att bestämma ett närmevärde på  $\beta$  motsvarande den geometriska tolkningen ovan, men för mera komplicerade/sammansatta frekvensfunktioner.

## Metoder för beräkning av tillförlitlighet

Det finns ett antal metoder för att beräkna tillförlitligheten hos en konstruktion av vilka de vanligaste kommer att tas upp här. Val av metod beror huvudsakligen på hur gränsytan ser ut (linjär - icke-linjär) samt på noggrannhetskrav. För de metoder som beskrivs inledningsvis förutsätts att de primära variablerna är, eller kan betraktas som, oberoende och normalfördelade. Metoder för beräkning av andra fördelningstyper kommer bara att beröras helt kort.

## Klassificering av probabilistiska dimensioneringsmetoder

### Nivå 1

Nivå 1 (level 1) metoder är egentligen ingen probabilistisk metod. Den innefattar utnyttjandet av säkerhetsfaktorer för att ta hänsyn till osäkerheten i de ingående variablerna. Varje variabel beskrivs endast av ett karakteristiskt värde t ex medelvärdet eller accepterat minimivärde vid kontroll. Säkerhetsfaktorerna väljs beroende på erfarenhetsbaserade data eller i vissa fall baserade på probabilistiska beräkningar där målet är att få en acceptabel tillförlitlighet.

### Nivå 2

Nivå 2 (level 2) metoder bygger i princip på att de stokastiska primära variablerna kan beskrivas av två värden, väntevärde (medelvärde) och varians (standardavvikelse), samt för beroende variabler även kovarians (korrelationskoefficienter). De använda metoderna inom denna nivå kan leda till "exakta" eller approximativa värden på tillförlitligheten beroende på hur gränsytan och fördelningsfunktionerna ser ut. Metoderna går vanligen ut på att bestämma säkerhetsindex  $\beta$ . Inom denna nivå återfinns FORM och SORM som kort beskrivs nedan.

### Nivå 3

Nivå 3 (level 3) metoder innebär att man använder de primära variablernas "verkliga" frekvensfunktioner för att bestämma frekvensfunktionen för säkerhetsmarginalen  $M$ . Sannolikheten för haveri beräknas direkt genom:

$$P_f = \int_{-\infty}^0 f_m(x) dx = F_M(x)$$

I praktiken finns sällan analytiska lösningar till detta uttryck utan man är hänvisad till numeriska lösningar, ofta i skräddarsydda datorprogram för probabilistiska metoder.



## Cornells säkerhetsindex $\beta_C$

Cornells säkerhetsindex bygger på att väntevärde  $\mu_M$  och standardavvikelse  $\sigma_M$  för säkerhetsmarginalen  $M = R - S$  är kända:

$$\beta_C = \frac{\mu_M}{\sigma_M}$$

Detta är ett exakt mått på säkerhetsindex,  $\beta_C = \beta$ , om säkerhetsmarginalen är normalfördelad i övriga fall är det en approximation.

Om marginal funktionen  $M=g(\mathbf{X})$  är en linjärkombination av de primära variablerna  $X_i$  (dvs gränsytan är linjär), och om  $\mathbf{X}$  kan beskrivas av normalfördelade oberoende stokastiska variabler med väntevärde  $\mu_{X_i}$  och standardavvikelse  $\sigma_{X_i}$  så är  $M$  också normalfördelad:

$$M=g(\mathbf{X})=a_0 + a_1 \cdot X_1 + a_2 \cdot X_2 + \dots + a_n \cdot X_n$$

$$\mu_M = a_0 + a_1 \cdot \mu_{X_1} + a_2 \cdot \mu_{X_2} + \dots + a_n \cdot \mu_{X_n}$$

$$\sigma_M = \sqrt{a_1^2 \cdot \sigma_{X_1}^2 + a_2^2 \cdot \sigma_{X_2}^2 + \dots + a_n^2 \cdot \sigma_{X_n}^2}$$

## Geometrisk tolkning av $\beta_C$

Som tidigare visats 1-dimensionellt, kan säkerhetsindex också ges en geometrisk tolkning. Betrakta nu ett 2-dimensionellt fall, dvs med två primära variabler så att  $M=a_0+a_1X_1+a_2X_2$ . Då standardavvikelsen är olika för de båda variablerna kommer nivå-konturerna av frekvensfunktionen  $f_{X_1X_2}(x_1,x_2)$  att utgöras av ellipser.  $\beta_C$  är avståndet mellan den gemensamma väntevärdespunkten  $(\mu_{X_1}, \mu_{X_2})$  och den punkt där tangenten till en nivåkontur sammanfaller med gränsytan. För att enkelt kunna bestämma  $\beta_C$  inför vi en variabeltransformation.

## Transformation till standardiserad normalfördelning

Oberoende normalfördelade stokastiska variabler  $X_i$  kan transformeras till standardiserade normalfördelade variabler  $Z_i \in (N[0, 1])$  genom:

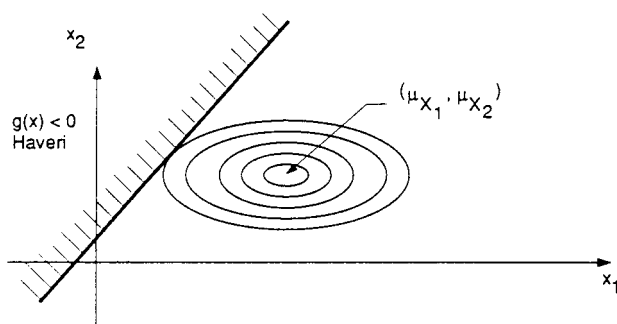
$$Z_i = \frac{X_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}} \quad \text{dvs} \quad X_i = \sigma_{X_i} \cdot Z_i + \mu_{X_i}$$

Nivåkonturerna kommer därmed att övergå från ellipser med centrum i punkten  $(\mu_{X_1}, \mu_{X_2})$  i  $\mathbf{X}$ -rymden till cirklar med centrum i origo i  $\mathbf{Z}$ -rymden.

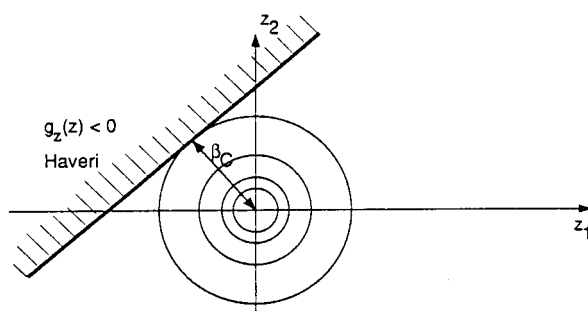
Här ges  $\beta_C$  av det kortaste avståndet mellan origo och gränsytan. Den punkt på gränsytan  $g(\mathbf{z}) = 0$  som uppfyller detta villkor kallas konstruktionspunkten (design point).

För det 2-dim fallet erhålls:

$$\beta_C = \frac{a_0 + a_1 \cdot \mu_{X_1} + a_2 \cdot \mu_{X_2}}{\sqrt{(a_1 \cdot \sigma_1)^2 + (a_2 \cdot \sigma_2)^2}}$$



Nivåer för sannolika värden hos normalfördelade  $X_1$  och  $X_2$ .



Nivåer för sannolika värden hos de standardiserade normalfördelade stokastiska variablerna  $Z_1$  och  $Z_2$ .

## Approximativa metoder för icke-linjära gränssytor (FORM/SORM)

Om gränssytan  $g(\mathbf{X})=0$  är en icke-linjär funktion så är säkerhetsmarginalen inte längre normalfördelad. Man kan då använda approximativa metoder genom att Taylor-utveckla  $g(\mathbf{X})=0$  runt en punkt  $\mathbf{x}=\mathbf{q}$  upp till ordning  $m$ :

$$g(\mathbf{X}) \approx g(\mathbf{q}) + \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n \frac{\partial^k g(\mathbf{q})}{\partial x_i^k} \cdot (x_i - q_i)^k$$

$m=1$ , dvs linjärisering av  $g(\mathbf{X})$  kring punkten  $\mathbf{q}$ , ger första ordningens säkerhetsmarginal  $M_{FO}$ :

$$M \approx M_{FO} = g(\mathbf{q}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(\mathbf{q})}{\partial x_i} \cdot (x_i - q_i)$$

Första ordningens säkerhetsindex enl Cornell kan då skrivas:

$$\beta_{FO} = \frac{\mu_{M_{FO}}}{\sigma_{M_{FO}}}$$

Denna metod kallas FORM (*First Order Reliability Method*), och om även andra ordningens term tas med ( $m=2$ ), SORM (*Second Order Reliability Method*).

Ett problem med dessa metoder är val av linjäriseringspunkt  $\mathbf{q}$ . Om vi väljer medelvärdespunkten  $\mathbf{q} = (\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n})$  fås:

$$\beta_{FO} = \frac{g(\mathbf{q})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g(\mathbf{q})}{\partial x_i} \cdot \sigma_{X_i} \right)^2}}$$

Detta val kan, beroende på gränssytans form m.m., ge relativt stora fel. Beroende på hur säkerhetsmarginalen är definierad kan man få olika säkerhetsindex för samma tillförlitlighet. Naturligare vore att välja en punkt på gränssytan - den punkt som ligger närmast medelvärdespunkten - som linjäriseringspunkt. Detta leder oss vidare till Hasofer och Linds säkerhetsindex.

## Hasofer och Linds säkerhetsindex

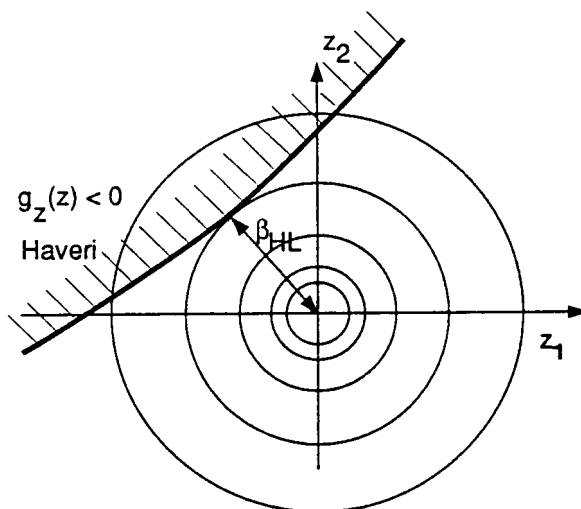
Säkerhetsindex enligt Hasofer och Lind,  $\beta_{HL}$ , har fördelen att det inte är relaterat till marginalfunktionen  $M$  utan endast till gränsytan  $g(\mathbf{X})=0$ . Detta gör  $\beta_{HL}$  till ett entydigt - om än inte alltid exakt - mått på en strukturs tillförlitlighet.

Det första steget i Hasofer och Linds metod är att transformera (normalisera) de primära variablerna  $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Z}$  så att de nya primära variablerna  $\mathbf{Z}$  är standardiserade normalfördelade S.V.

Säkerhetsindex  $\beta_{HL}$  kan nu definieras som det kortaste avståndet från origo till gränsytan i det normaliserade koordinatsystemet, dvs:

$$\beta_{HL} = \min_{\mathbf{z} \in \omega} \sqrt{\sum_i^n z_i^2}$$

där  $\omega$  är gränsytan.



Icke-linjär gränsyta och normaliserade koordinater.

Uttrycket ovan är ett optimeringsproblem där längden på vektorn  $\mathbf{z}$  ska minimeras med bivillkoret att  $\mathbf{z}$  ska tillhöra gränsytan  $\omega$ . Då gränsytan är icke-linjär måste uttrycket lösas iterativt, dvs det är huvudsakligen ett numeriskt problem.

En metod för att lösa detta problem är att i varje iteration  $j$  linjärisera  $g(\mathbf{z}^{(j)})$  kring  $\mathbf{z}^{(j)}$  varpå punkten på detta plan (eller kurva/"hyperplane") närmast origo kan bestämmas.  $\mathbf{z}^{(j+1)}$  ges av summan av denna punkt samt ett bidrag som baseras på  $g(\mathbf{z}^{(j)})$  skillnad från noll.

## Korrelerade primära variabler

Vi har hittills förutsatt att de primära variablerna varit oberoende (okorrelerade). Detta innebär att:

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2)$$

I praktiken är ofta olika primära variabler kopplade till varandra. Detta beroende beskrivs av kovariansen.

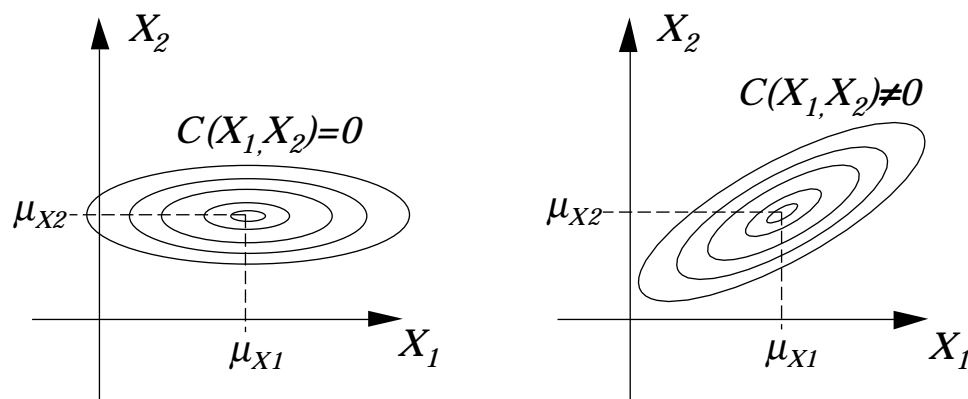
## Kovarians

Låt väntevärdena för  $X_1$  och  $X_2$  vara  $\mu_{X_1}$  och  $\mu_{X_2}$ .

Kovariansen (*covariance*) för  $X_1$  och  $X_2$  definieras av

$$C(X_1, X_2) = E[(X_1 - \mu_{X_1})(X_2 - \mu_{X_2})] = E[X_1 X_2] - E[X_1]E[X_2]$$

Om  $C(X_1, X_2) = 0$  sägs  $X_1$  och  $X_2$  vara okorrelerade. Oberoende S.V. är alltid okorrelerade, men okorrelerade S.V. är inte nödvändigtvis oberoende.



Exempel på nivåkonturer av  $f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$  då  $X_1$  och  $X_2$  är okorrelerade (vänster) resp. korrelerade (höger).

Variansen för summan av två korrelerade S.V. kan skrivas:

$$\sigma^2(X_1 + X_2) = \sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + 2C(X_1, X_2)$$

## Kovariansmatris

För ett större antal S.V.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  kan den ömsesidiga korrelationen beskrivas med kovariansmatrisen:

$$C_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & C(X_1, X_2) & \dots & C(X_1, X_n) \\ C(X_2, X_1) & \sigma_{X_2}^2 & \dots & C(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C(X_n, X_1) & \dots & C(X_n, X_{n-1}) & \sigma_{X_n}^2 \end{bmatrix}$$

som är symmetrisk så att  $C(X_i, X_j) = C(X_j, X_i)$ .

## Korrelationskoefficient

Korrelationskoefficienten för  $X_1$  och  $X_2$  definieras som

$$\rho_{X_1, X_2} = \frac{C(X_1, X_2)}{\sigma_{X_1} \cdot \sigma_{X_2}}$$

och är en dimensionslös storhet som kan anta värden i intervallet -1 till 1. Om  $X_1$  och  $X_2$  är linjärt beroende är  $\rho_{X_1, X_2} = \pm 1$ , för okorrelerade variabler är  $\rho_{X_1, X_2} = 0$ .

## Transformation av normalfördelade korrelerade primära variabler

En vektor av korrelerade S.V.  $\mathbf{X}$  kan linjärtransformeras till okorrelerade S.V.  $\mathbf{Y}$ :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}^T \mathbf{X}$$

där  $\mathbf{A}$  är en transformationsmatris vars radvektorer består av egenvektorerna av  $C_{\mathbf{X}}$ .

De nya variablerna  $\mathbf{Y}$  har väntevärden

$$E[\mathbf{Y}] = \mathbf{A}^T E[\mathbf{X}]$$

och kovariansmatrisen

$$C_{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}^T C_{\mathbf{X}} \mathbf{A}$$

Eftersom de stokastiska variablerna  $\mathbf{Y}$  är okorrelerade så är dess kovariansmatris diagonal så att normalisering av  $\mathbf{Y}$  till standardiserade normalfördelade S.V.  $\mathbf{Z}$  kan skrivas

$$\mathbf{Z} = \mathbf{C}_Y^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{Y} - E[\mathbf{Y}])$$

Transformationen kan i ett steg skrivas:

$$\mathbf{Z} = (\mathbf{A}^T \mathbf{C}_X \mathbf{A})^{-\frac{1}{2}} \mathbf{A}^T (\mathbf{X} - E[\mathbf{X}])$$

Det kortaste avståndet mellan origo i det normaliserade systemet och gränsytan, dvs Hasofer och Linds säkethetsindex  $\beta_{HL}$  kan då direkt skrivas som

$$\beta_{HL} = |\mathbf{z}^*| = \min_{\mathbf{z} \in \omega_z} \sqrt{\sum_i^n z_i^2} = \min_{\mathbf{z} \in \omega_z} \left( (\mathbf{x} - E[\mathbf{X}])^T \mathbf{C}_X^{-1} (\mathbf{x} - E[\mathbf{X}]) \right)^{-\frac{1}{2}}$$

där  $\mathbf{z}^*$  är konstruktionspunkten.

## Transformation av icke normalfördelade variabler till standardiserade normalfördelade

Låt  $\mathbf{X}$  vara en vektor av oberoende icke normalfördelade primära variabler.  $\mathbf{X}$  kan transformeras till standardiserade normalfördelade  $\mathbf{Z}$  genom att sätta

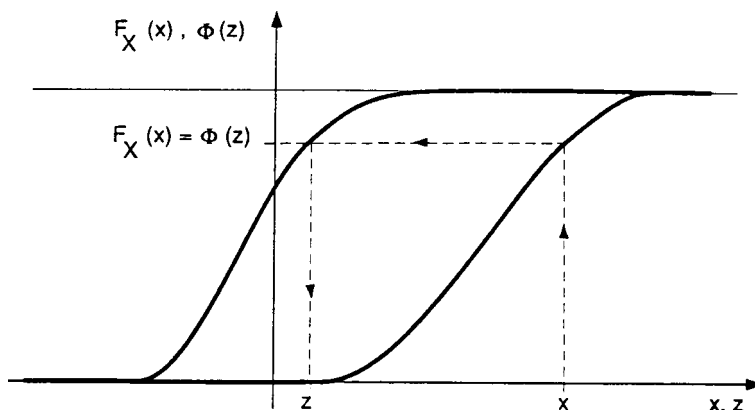
$$\Phi(z_i) = F_{X_i}(x_i)$$

så att

$$z_i = \Phi^{-1}(F_{X_i}(x_i))$$

och

$$x_i = F_{X_i}^{-1}(\Phi(z_i))$$



Transformationen av x-variabler till z-variabler.

En transformation enl ovan leder vanligen till att  $g(\mathbf{z})$  inte kan uttryckas som en analytisk funktion.

## Monte-Carlo simulering

"Monte-Carlo" metoden är inget annat än en direkt simulering av probabilistiska funktioner. Metodiken har på senare år fått allt större användningsområde pga dess relativa generalitet (inte dess genialitet!) och pga att den är mycket lätt att genomföra med datorhjälp. Det finns dock flera nackdelar med metoden och den rekommenderas ej allmänt av auktoriteter inom probabilistisk dimensionering.

### Grundidé

Antag att de primära variablerna  $X$  är oberoende och har godtyckliga kända fördelningsfunktioner. Man kan då slumpgenerera utfall  $x^{(k)}$  så att motsvarande utfall av marginalfunktionen  $M$  erhålls:

$$m^{(k)} = g(\mathbf{x}^{(k)}) = g(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_3^{(k)})$$

Genom att repetera detta för ett stort antal  $k$  simuleras uppbyggnaden av frekvensfunktionen för  $M$ .

Denna frekvensfunktion kommer inte att vara av en analytiskt bestämd typ.

Tillförlitligheten  $P_r$  kan vid Monte-Carlo simulering uppskattas på två principiellt olika sätt. Det första är att uttrycka  $P_r$  som:

$$P_r \approx P[M > 0] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{j}{n} \right)$$

där  $j$  är antal utfall som gett  $m^{(k)} > 0$ , och där  $n$  i detta fall är det totala antalet simulerade utfall.

För system med hög tillförlitlighet krävs ett mycket stort antal slumpgenererade värden för att det uppskattade värdet inte ska bli alltför osäkert. Detta kan göra metoden tidskrävande.

Det andra sättet att uppskatta tillförlitligheten bygger på att man försöker anpassa en analytisk lämplig frekvensfunktion  $f_{M'}$  till de genererade värdena  $m^{(k)}$ . Detta minskar väsentligt det antal värden som måste slumpgenereras. Tillförlitligheten beräknas direkt ur den anpassade frekvensfunktionen som

$$P_r \approx 1 - \int_{-\infty}^0 f_{M'}(m') dm'$$

Här förs istället osäkerhet in genom valet av frekvensfunktion för att representera utfallet.



## Slumptalsgenerering

I de flesta programmeringsmiljöer (t ex kalkylprogram) finns möjlighet att generera slumptal. Funktionen RND eller motsv. genererar likafördelade slumptal  $r_i$  mellan 0 och 1.

För att generera ett slumptal som följer en given fördelning  $F_X(x)$  kan man utnyttja inversen till fördelningsfunktionen så att:

$$x_i = F_X^{-1}(r_i)$$

För normalfördelningen kan man inte lösa ut  $F_X^{-1}$  explicit, alternativa metoder för att generera normalfördelade slumptal är (ur *BETA Mathematics Handbook*):

### Simulation of the normal distribution $N(\mu, \sigma)$

#### Use of the central limit theorem

Calculate the sum  $T = \sum_{i=1}^{12} U_i$  of twelve random numbers between 0 and 1 and calculate  $(T-6)\sigma + \mu$ .

#### The Box-Müller method

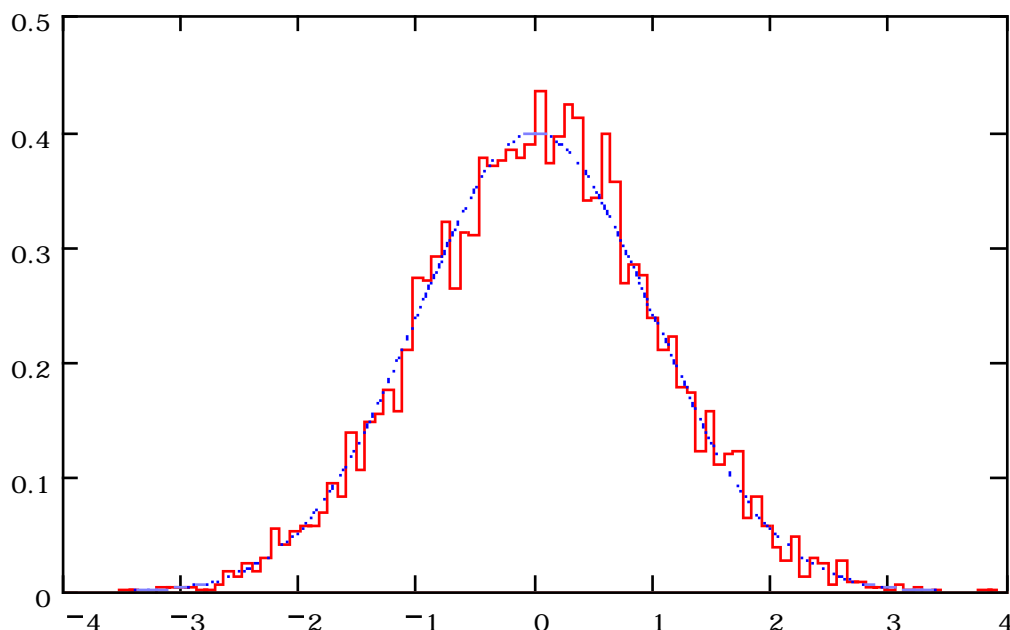
This method uses the following result. Calculate  $X_1$  and  $X_2$  according to

$$X_1 = \sqrt{-2 \ln U_2} \cos(2\pi U_1)$$

$$X_2 = \sqrt{-2 \ln U_2} \sin(2\pi U_1)$$

If  $U_1$  and  $U_2$  are independent random numbers between 0 and 1, then  $X_1$  and  $X_2$  are independent and  $N(0, 1)$ .

Nedan ett exempel på jämförelse mellan "Box-Müller" simulering och en analytisk normalfördelning. 5000 slumptal



## Strukturella system

Hittills har vi studerat enskilda haveriorsaker, dvs tillförlitligheten har baserats på ett enda "limit state". För verkliga konstruktioner finns det oftast flera olika möjliga orsaker till haveri. Dels kan ett enskilt konstruktionselement, en komponent, haverera på olika sätt, en stötta kan tex haverera pga drag eller pga knäckning under tryck, och dels kan en konstruktion bestå av flera olika strukturelement. Varje haveriorsak kräver en egen marginalfunktion  $g_j(\mathbf{X}_j)$ , där  $\mathbf{X}_j$  är vektorn av primära variabler för den j:te haveriorsaken. Hur systemets totala gränsyta  $g(\mathbf{X})=0$  ser ut beror på komponenternas marginalfunktioner och på hur systemet är uppbyggt. Man skiljer här mellan seriesystem och parallellsystem.

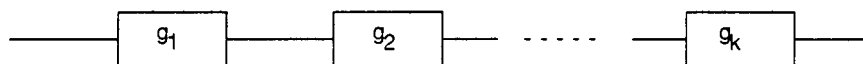
## Seriesystem

Ett seriesystem är ett system för vilket haveri inträffar om en av komponenterna havererar. Haveriområdet  $\omega_f$  för ett seriesystem med k komponenter kan skrivas som

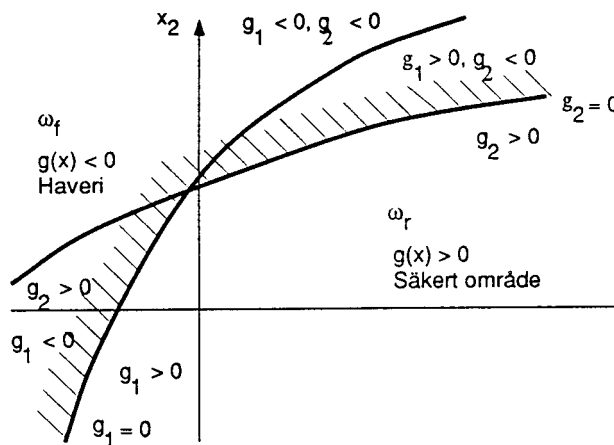
$$\omega_f = \{\mathbf{x} : g(\mathbf{x}) \leq 0\} = \bigcup_{j=1}^k \{\mathbf{x} : g_j(\mathbf{x}) \leq 0\}$$

dvs

$$\omega_f = \{\mathbf{x} : g_1(\mathbf{x}) \leq 0, \text{ eller } g_2(\mathbf{x}) \leq 0, \text{ eller } \dots \text{ eller } g_k(\mathbf{x}) \leq 0\}$$



Tankmodell för ett seriesystem.



Gränsyta för ett seriesystem sammansatt av två komponenter.

## Parallellsystem

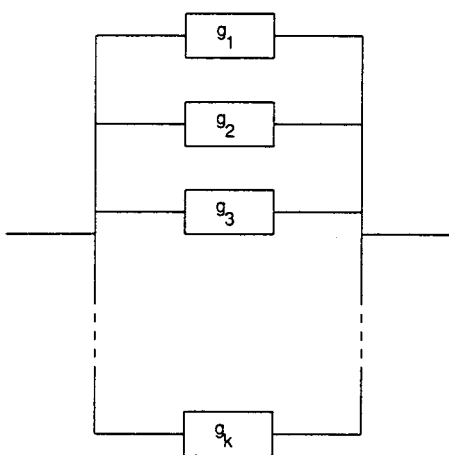
Ett parallellsystem är ett system för vilket haveri inträffar när samtliga komponenterna havererat.

Haveriområdet  $\omega_f$  för ett parallellsystem med  $k$  komponenter kan skrivas som

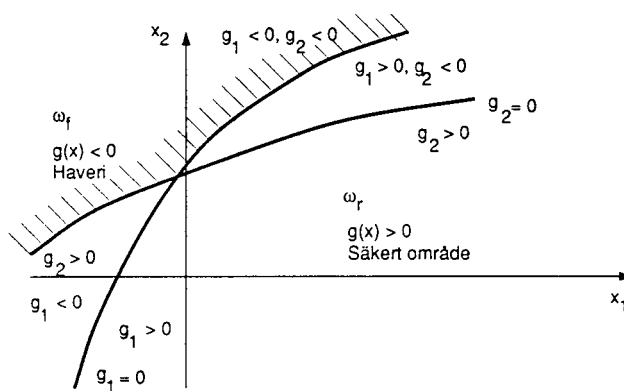
$$\omega_f = \{ \mathbf{x} : g(\mathbf{x}) \leq 0 \} = \bigcap_{j=1}^k \{ \mathbf{x} : g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \}$$

dvs

$$\omega_f = \{ \mathbf{x} : g_1(\mathbf{x}) \leq 0, \text{ och } g_2(\mathbf{x}) \leq 0, \text{ och } \dots \text{ och } g_k(\mathbf{x}) \leq 0 \}$$



Tankemodell för ett parallellsystem.



Gränssytan för ett parallellsystem sammansatt av två komponenter.

Strukturer med redundans kan i princip betraktas som parallellsystem, där total kollaps inträffar som följd av flera simultana delhaverier i strukturelementen. Det bör dock observeras att säkerhetsmarginalen för de olika komponenterna vanligen påverkas av ett delhaveri. Till exempel kan buckling av en panel minska bärförmågan hos vägarna. Renodlade parallellsystem med oberoende marginalfunktioner hos komponenterna förekommer sällan eller aldrig i bärande strukturer eftersom en omlagring av belastningen från en havererad komponent nästan alltid leder till ökad belastning i de återstående komponenterna.

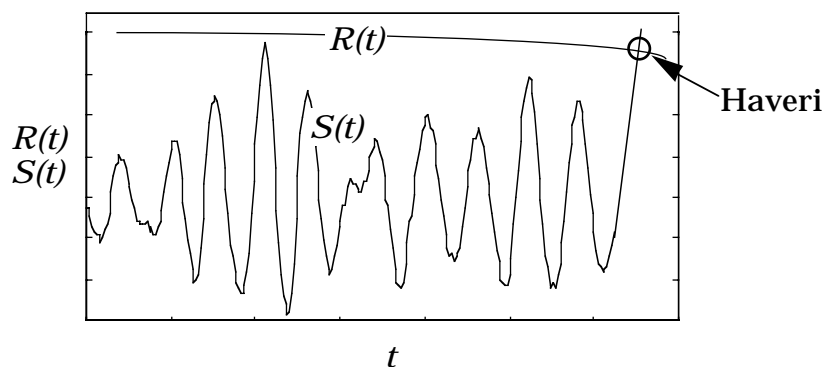
## Kombinerade system

I praktiken behöver man ofta arbeta med kombinerade system, dvs system som är både seriella och parallella. Detta behöver inte ha med den fysiska strukturen att göra utan det kan vara ett sätt att modellera att laster omlagras då en komponent havererar. "Exakta" beräkningar av sammansatta system är i många praktiska tillämpningar inte möjliga. Man använder sig därför ofta av simuleringsmetoder eller förenklade analytiska metoder för att uppskatta systemets tillförlitlighet, se tex *Thoft-Christensen/Baker*.

## Tidsberoende tillförlitlighet

I de tidigare avsnitten har en strukturs bärförmåga,  $R$ , och dess belastning,  $S$ , betraktats som tidsberoende. Men dessa storheter är givetvis mer eller mindre beroende av tiden. Bärförmågan kan t ex avta med tiden pga utmattning eller korrosion. Vidare är belastningar ofta tidsvarierande då de är inducerade av naturkrafter såsom vind och vågor; det är större risk för haveri vid än lång exponeringstid än vid en kort. Modeller för stokastiska processer måste användas för att beskriva lastvariabler av denna typ.

Den vanligaste typen av strukturella haverier kan kategoriseras som sk *first passage failure*, dvs kriteriet för haveri är  $R(t) < S(t)$  (Det finns dock fenomen som inte är av denna typ, tex olika dynamiska stabilitetsproblem för fartyg för vilka sannolikheten för haveri inte kan beskrivas på detta enkla sätt.)



Då de primära variablerna är tidsberoende blir också tillförlitligheten relaterad till tid. Den momentana risken för haveri  $P_f$  vid tiden  $t$  är i det allmänna fallet

$$P_f = P(R(t) - S(t) \leq 0)$$

Denna sannolikhet är dock av liten praktisk betydelse. Vad som vore intressant är ju istället risken för haveri under ett tidsintervall  $[0, T]$ . Om vi under detta tidsintervall kan betrakta  $R$  som konstant samt  $S(t)$  som en stationär process kan denna sannolikhet skrivas som

$$P_f(T) = P(R \leq S_{\max}(T))$$

där  $S_{\max}(T)$  är den tidsberoende stokastiska variabeln för maximum  $S$  under tidsintervallet  $[0, T]$ . Detta leder oss till extremvärdesfördelningar.

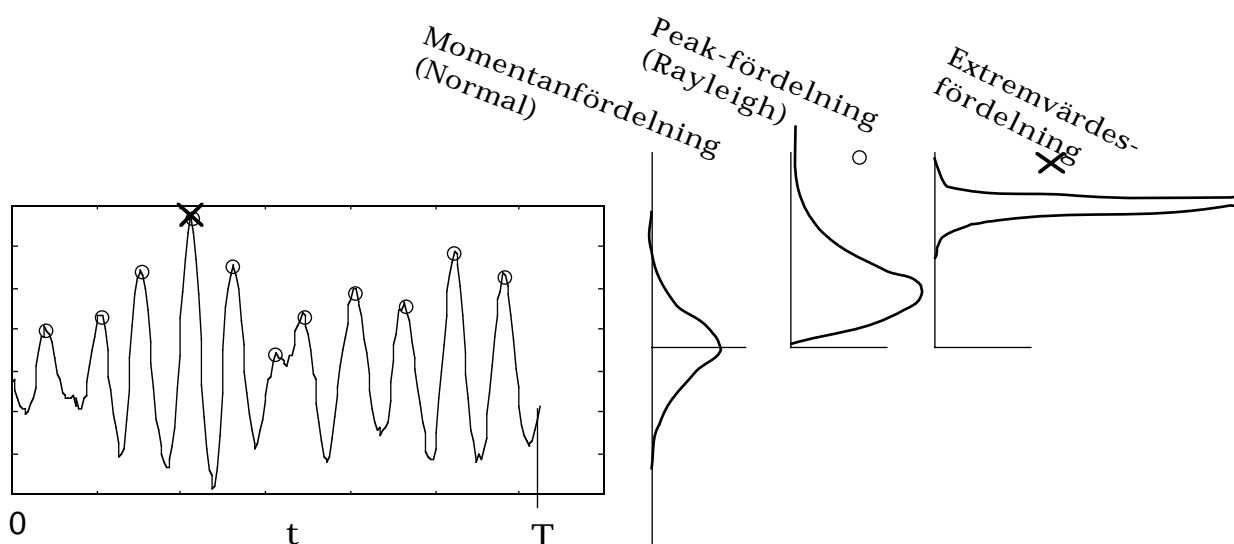
## Extremvärdesfördelningar

Betrakta som exempel den stationära stokastiska processen i figuren nedan. Låt denna process representera en linjär belastning, tex väginducerat böjmoment i skrovbalken.

Processen i sig själv är normalfördelad dvs momentanvärdet av böjmomentet vid en viss tidpunkt  $t$  beskrivs av normalfördelningen med medelvärdet noll och standardavvikelsen bestämd av hur "svårt" sjötilståndet är. Om processen är stationär kommer fördelningen att vara densamma oberoende av vilken tidpunkt vi väljer.

Om frekvensspridningen är liten följer fördelningen för enskilda lokala maxima (amplituder, pikar) en Rayleigh-fördelning.

Denna pik-fördelning ska inte förväxlas med extremvärdesfördelningen, vilken beskriver fördelningen av extrema maxima under det aktuella tidsintervallet. Extremvärdesfördelningar kan ses som den fördelning som skulle växa fram om vi genererade ett stort antal tidsserier av längden  $T$  och från varje sådan tidsserie tog ut endast det allra största värdet och ritade ett frekvensdiagram (histogram) för dessa.



För allt längre tidslängder  $T$  går extremvärdesfördelningen för Rayleigh-fördelade variabler asymptotiskt mot en sk Gumble-fördelning.

Fördelningsfunktionen för extremvärden kan enkelt beräknas ur grundfördelningen. Antag att vi har  $n$  oberoende utfall av en s.v.  $X$  som följer fördelningsfunktionen  $F_X(x)$ .

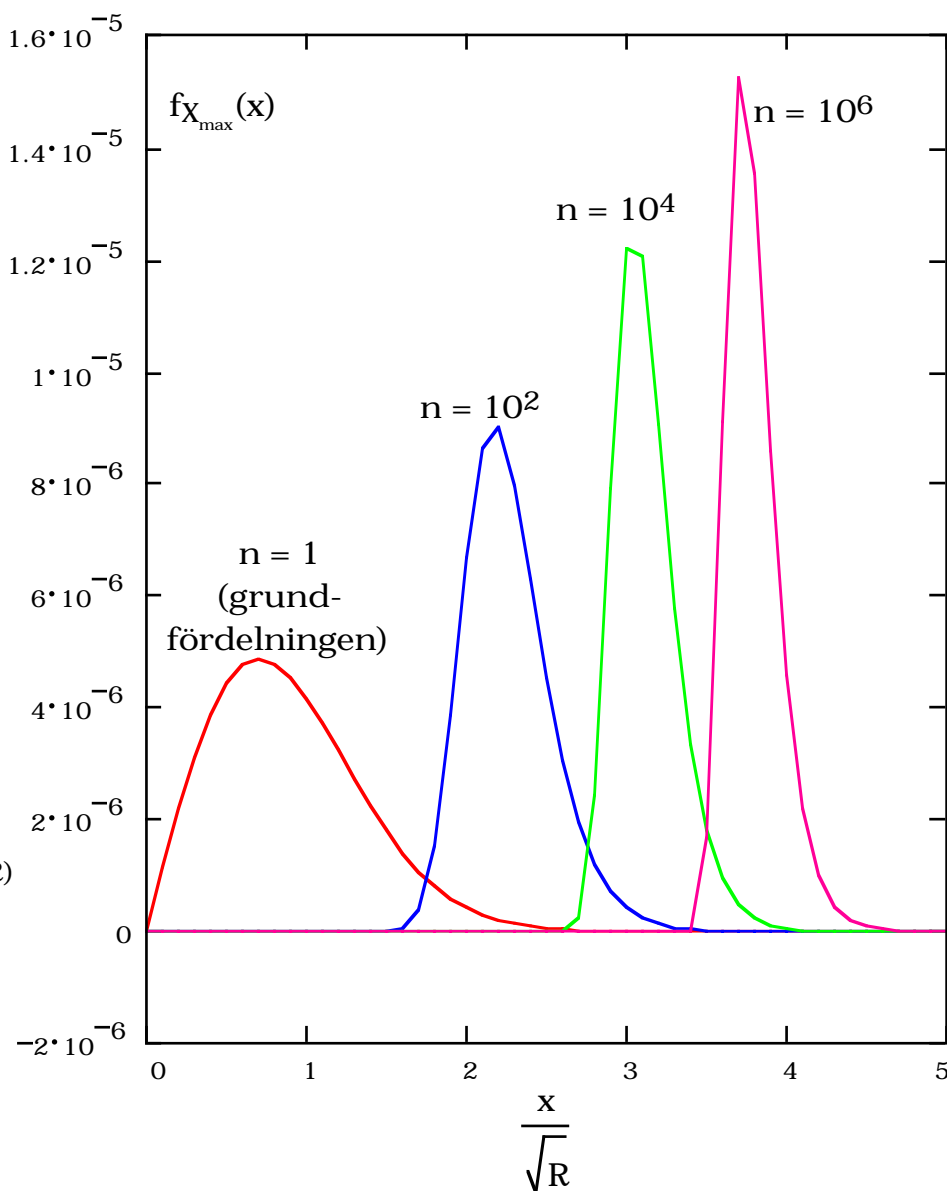
Sannolikheten att inget av dessa värden överskrider ett värde  $x_{\max}$  kan skrivas:

$$F_{X_{\max}}(n, x_{\max}) = F_X(x_{\max})^n$$

eller omvänt risken för att  $x_{\max}$  överskrids någon gång blir:

$$Q_{X_{\max}}(n, x_{\max}) = 1 - F_X(x_{\max})^n$$

Piken på extremvärdesfördelningen brukar kallas "mest sannolikt maxvärde" (bland  $n$  värden) och kan för stora  $n$  väl approximeras med  $x'_{\max} = F_X^{-1}(1 - 1/n)$  dvs det värde som har risken  $Q = 1/n$  att överskridas i varje utfall.



Exempel på extremvärdesfördelningar för olika antal utfall

Grundfördelningen är en Rayleigh-fördelning

$$F_X(x) = 1 - e^{-(x^2 / R)}$$

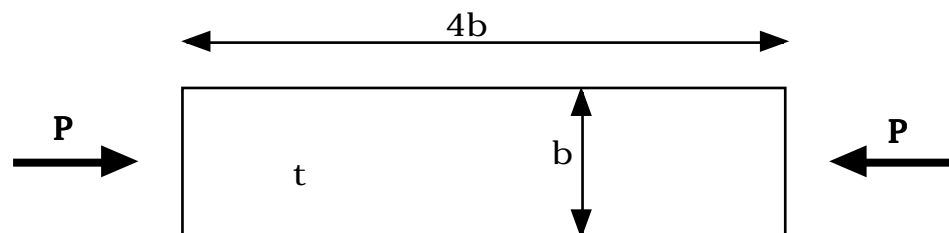
där  $R$  är den s k Rayleigh-parametern

## Beräkningsexempel

Jag väljer här ett exempel med tre primära stokastiska variabler, varav en är icke-normalfördelad. Lösningar redovisas med alla de olika metoder som presenterats tidigare. Samtliga beräkningar är utförda med MathCad.

### Uppgift och förutsättningar

Ett fritt upplagt plåtfält i en längskeppsförstyvad panel är utsatt för en varierande axiell kraft  $P$  ( $= \sigma b t$ ) pga fartygets våginducerade skrovbalkböjning. Uppskatta sannolikheten (risken) att plåtfältet kommer att buckla under en enskild belastning samt risken att plåtfältet bucklar någon gång under en timmes belastningar (ca 600 belastningsväxlingar).



Vi antar vanligt fartygsstål samt ansätter följande primära stokastiska variabler:

Plåttjockleken  $t$  är normalfördelad med medelvärdet 6 mm och standardavvikelsen 0.5 mm

Plåtfältets bredd  $b$  är normalfördelad med medelvärdet 0.5 m och standardavvikelsen 0.005 m

De våginducerade belastningsamplituderna är Rayleigh-fördelade med signifikantvärdet 150 kN.

Den nominella bucklingsspänningen ligger under halva sträckgränsen och vi kan därför betrakta problemet som ren elastisk (Euler-) buckling.

Vi börjar med att definiera de olika ingående fördelningarna och räknar på risken för buckling vid en enskild belastningsväxling.

## Fördelningsfunktioner för primära stokastiska variabler

Frekvens- och fördelningsfunktioner för normalfördelade variabler definieras:

Frekvensfunktionen för normalfördelningen:

$$\phi(z, \mu, \sigma) := \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{\left(\frac{z - \mu}{\sigma}\right)^2}{2}}$$

Fördelningsfunktionen för normalfördelningen:

$$\Phi(z, \mu, \sigma) := \text{cnorm}\left(\frac{z - \mu}{\sigma}\right) \quad (\text{Fördef. funktion i MathCad})$$

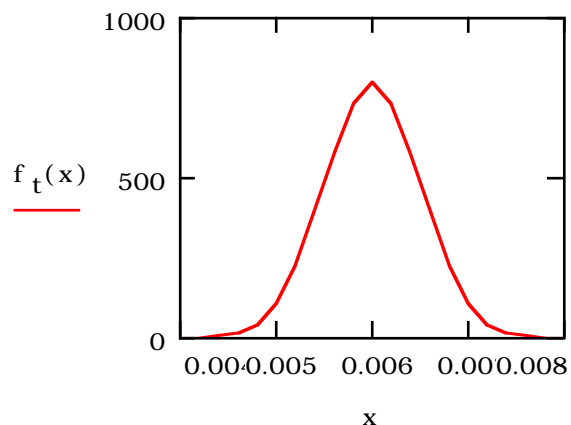
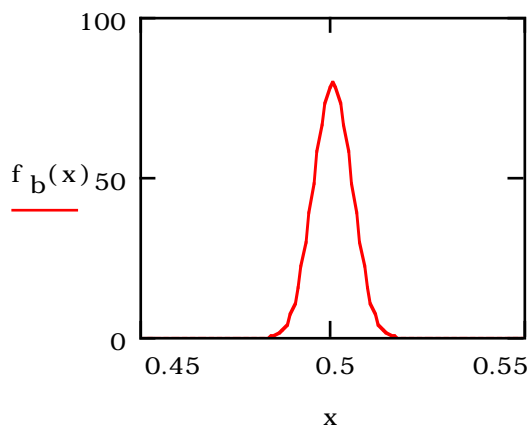
## Plåtbredd och plåttjocklek

$$\mu_b := 0.5 \quad \sigma_b := 0.005 \quad (\text{normalfördelad})$$

$$F_b(x) := \Phi(x, \mu_b, \sigma_b) \quad f_b(x) := \phi(x, \mu_b, \sigma_b)$$

$$\mu_t := 0.006 \quad \sigma_t := 0.0005 \quad (\text{normalfördelad})$$

$$F_t(x) := \Phi(x, \mu_t, \sigma_t) \quad f_t(x) := \phi(x, \mu_t, \sigma_t)$$





## Belastningar

$$P_S := 150000$$

Signifikant axiell belastning

$$R := \left[ \frac{P_S}{1.4157} \right]^2$$

$$R = 1.123 \cdot 10^{10}$$

Rayleigh-parametern

$$f_P(x) := \frac{2 \cdot x}{R} \cdot \exp\left[-\frac{x^2}{R}\right]$$

Rayleigh-fördelningen

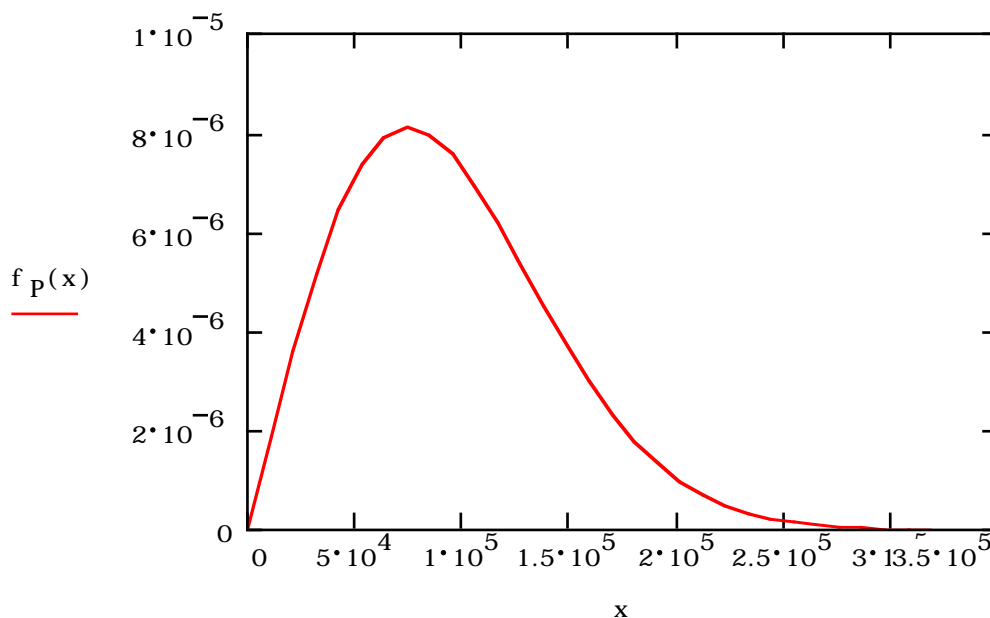
$$\mu_P := \int_0^{10^7} x \cdot f_P(x) dx \quad \mu_P = 9.39 \cdot 10^4 \quad \text{Medelvärde}$$

$$V_P := \int_0^{10^7} (x - \mu_P)^2 \cdot f_P(x) dx \quad \text{Varians}$$

$$\sigma_P := \sqrt{V_P} \quad \sigma_P = 4.908 \cdot 10^4 \quad \text{Standardavvikelse}$$

alternativt:

$$\sigma_P := \sqrt{(R - \mu_P^2)} \quad \sigma_P = 4.908 \cdot 10^4$$



## Marginalfunktionen

$$\sigma_{cr} := K \cdot E \cdot \frac{t^2}{b^2} \quad \text{Kritisk bucklingsspänning}$$

$$K := 0.9 \cdot 4 \quad \text{Bucklingskoefficienten i "designformula"}$$

$$E := 2.1 \cdot 10^{11} \quad \text{Elasticitetsmodulen (deterministisk här)}$$

$$M := \sigma_{cr} - \frac{P}{b \cdot t} \quad \text{(uttryckt i enheten spänning)}$$

eller

$$M := K \cdot E \cdot t^3 - P \cdot b \quad \text{(uttryckt i enheten moment)}$$

$$g(P, b, t) := K \cdot E \cdot t^3 - P \cdot b \quad \text{("limit state function")}$$

## Lösning med FORM (Level II, antaget normalfördelningar)

Partiella derivatan med avseende på de olika primära variablerna definieras:

$$g_P(P, b, t) := -b$$

$$g_b(P, b, t) := -P$$

$$g_t(P, b, t) := 3 \cdot K \cdot E \cdot t^2$$

Säkerhetsindex enligt Cornell beräknas:

$$\beta_{FO} := \frac{g(\mu_P, \mu_b, \mu_t)}{\sqrt{(g_P(\mu_P, \mu_b, \mu_t) \cdot \sigma_P)^2 + (g_b(\mu_P, \mu_b, \mu_t) \cdot \sigma_b)^2 + (g_t(\mu_P, \mu_b, \mu_t) \cdot \sigma_t)^2}}$$

$$\beta_{FO} = 2.442$$

vilket motsvarar en bucklingsrisk per belastningscykel på

$$P_f = 0.00726$$

## Lösning med direkt integration (Level III)

Fördelningsfunktionen för "belastningen" (S) uttryckt i enheten moment (enligt marginalfunktionen) löses med numerisk integration. Integrationsintervallet ska egentligen gå till oändligheten men det ställer till numeriska problem, därför väljs en övre integrationsgräns som täcker in det intressanta området:

$$F_S(x) := \int_0^{3 \cdot 10^5} f_P(\xi) \cdot F_b\left(\frac{x}{\xi}\right) d\xi$$

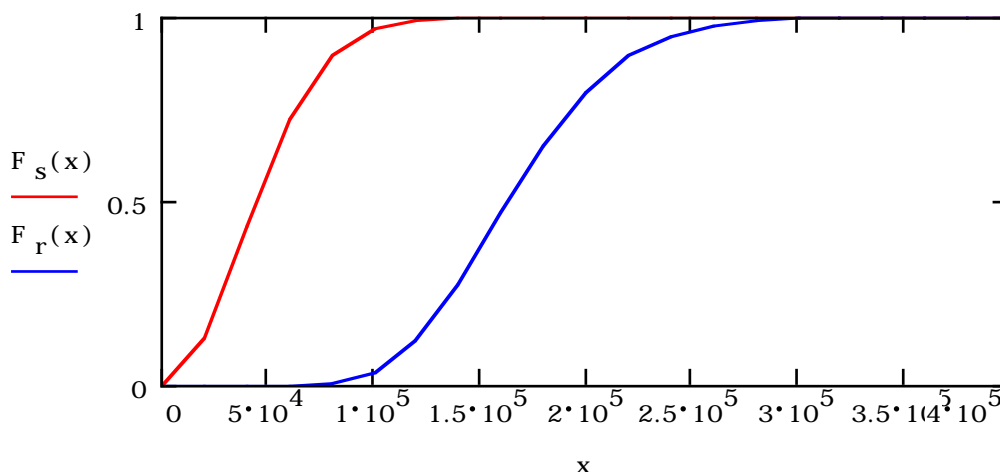
med frekvensfunktionen:

$$f_S(x) := \frac{d}{dx} F_S(x)$$

Fördelningsfunktionen för "styrkan" (R) uttryckt i enheten moment blir:

$$F_R(x) := F_t\left[\left(\frac{x}{K \cdot E}\right)^{\frac{1}{3}}\right]$$

Fördelningsfunktionerna plottas för att bestämma lämpligt integrationsintervall för marginalfunktionen:



$$P_f := \int_0^{3 \cdot 10^5} F_R(x) \cdot f_S(x) dx \quad \boxed{P_f = 0.003914}$$

Vilket motsvarar ett säkerhetsindex  $\beta = 2.66$

## Lösning med Monte Carlo simulering

Vi börjar med att skapa 3 oberoende slumpvariabler med tiotusen utfall jämt fördelade i intervallet  $[0, 1]$ :

```
imax := 10000
```

```
i := 1, 2.. imax
```

```
x1i := rnd(1)   x2i := rnd(1)   x3i := rnd(1)
```

Normerade normalfördelade variabler för plåtbredd och tjocklek skapas med "Box-Müller" metoden:

$$xn1_i := (-2 \cdot \ln(x1_i))^{1/2} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot x2_i)$$

$$xn2_i := (-2 \cdot \ln(x2_i))^{1/2} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot x1_i)$$

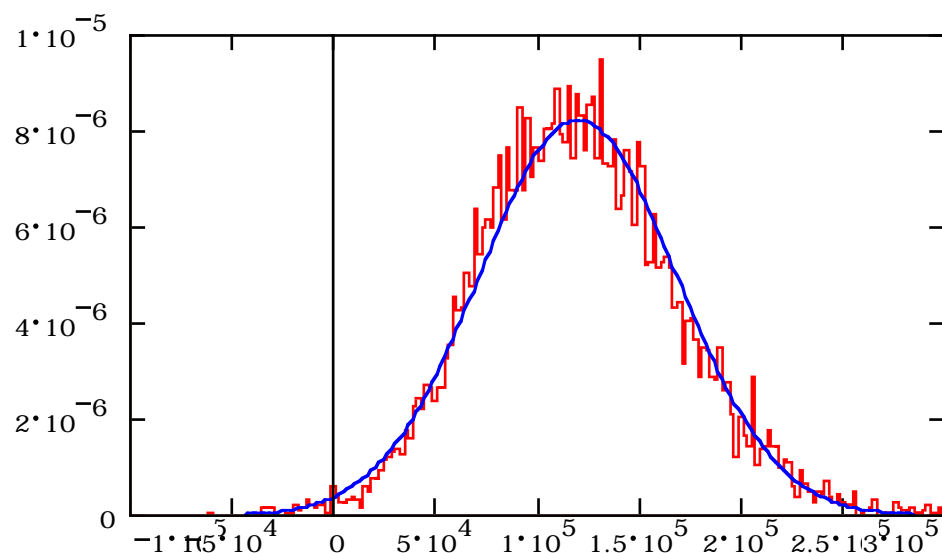
För de Rayleigh-fördelade belastningarna används inversen av fördelningsfunktionen:

$$xR3_i := \sqrt{R \cdot \ln\left(\frac{1}{1 - x3_i}\right)}$$

Marginalfunktionens utfall blir då:

$$m_i := K \cdot E \cdot (\sigma_t \cdot xn1_i + \mu_t)^3 - xR3_i \cdot (\sigma_b \cdot xn2_i + \mu_b)$$

I figuren nedan visas ett exempel på simulerat utfall, jämfört med en normalfördelning baserad på medelvärde och varians från simuleringen:



Resultat från Monte Carlo simuleringar med relativt få utfall kommer naturligtvis att variera något. Tabellen nedan visar 10 olika slumpvalsgenereringar med 1000 utfall i varje:

$\mu/10000$	$\sigma/10000$	Pf	$\beta$
11.94	4.842	0.0057	2.466
11.98	4.847	0.0052	2.472
11.92	4.854	0.0046	2.456
11.97	4.819	0.0036	2.484
11.90	4.741	0.0030	2.510
11.89	4.806	0.0049	2.474
11.96	4.833	0.0042	2.475
11.94	4.856	0.0044	2.459
11.93	4.816	0.0041	2.477
11.97	4.852	0.0060	2.467
11.94	4.827	0.0046	2.474

Medelvärdet av Pf blir  $0.0046$  vilket motsvarar  $\beta = 2.605$ , medan  $\beta_C = 2.474$  utvärderat från medelvärde och varians ger  $P_f = 0.0067$ .

Sammanfattningsvis kan man säga att de olika metoderna ger för detta exempel relativt samstämmiga resultat. Med FORM och med anpassning av normalfördelning till Monte Carlo simuleringen erhålls ett något högre värde än vid direkt simulering eller integration. De senare metoderna borde ge ett riktigare värde eftersom de inte bygger på någon anpassning, men det är naturligtvis beroende av vilka numeriska metoder som använts

### Tidsberoende risk - extremvärdesfördelning

Vi ska här även försöka uppskatta risken för att buckling skall inträffa någon gång under ett upprepat antal stokastiska belastningar. Vi ska använda två olika angreppssätt.

I det första fastställer vi extremvärdesfördelningen för enbart belastningarna och genomför riskanalysen helt analogt med beräkningarna ovan för en enskild belastning. Detta motsvarar att en specifik panel bucklar under n belastningar

I det andra använder vi istället den kombinerade extremvärdesfördelningen för belastningar och styrka.

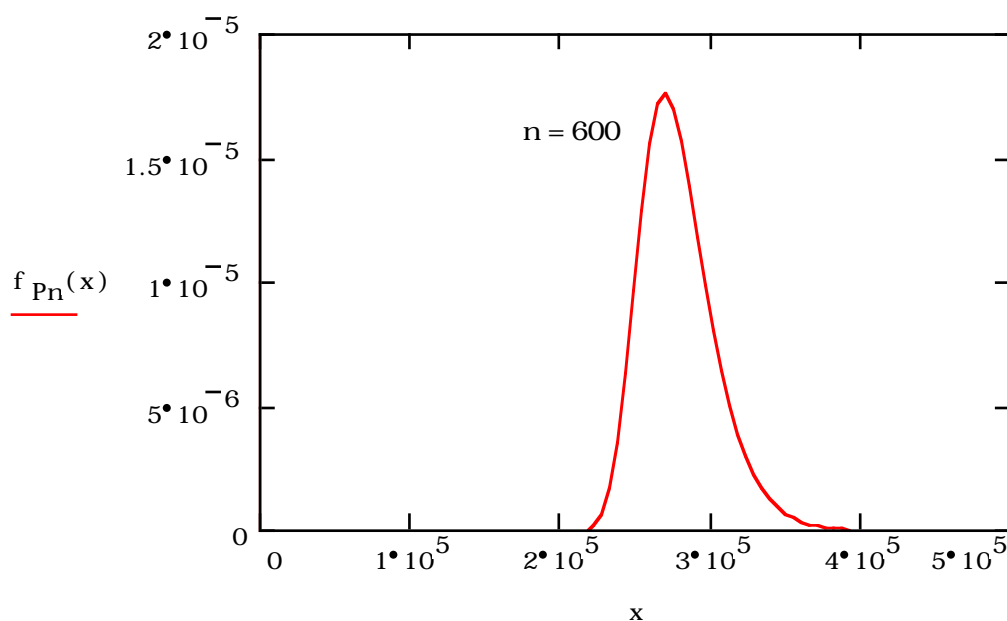
## Extremvärdesfördelningen för enbart belastningar

Fördelningsfunktionen för den största (extremvärdet) belastningen bland  $n$  belastningar blir:

$$F_{P_n}(x) := \left( 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{R}\right) \right)^n$$

med frekvensfunktionen:

$$f_{P_n}(x) := n \cdot \left( 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{R}\right) \right)^{n-1} \cdot 2 \cdot \frac{x}{R} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{R}\right)$$



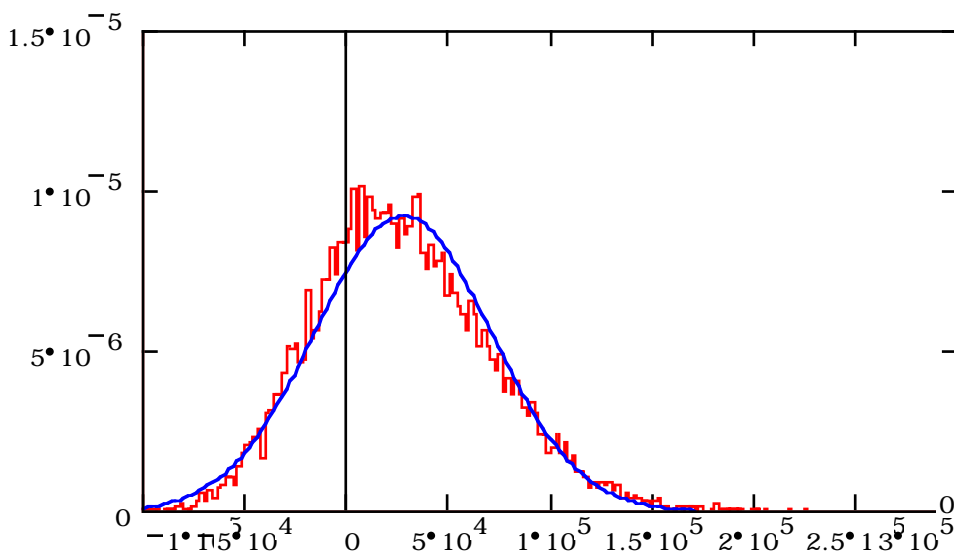
Exempel:  
för  $n=600$  cykler  
erhålls en spridning  
av den största  
belastningen enligt  
figuren, med  
medelvärde  
 $\mu_{P_n} = 2.787 \cdot 10^5$   
och  
standardavvikelse  
 $\sigma_{P_n} = 2.487 \cdot 10^4$

Används denna fördelning i FORM erhålls en totalt säkerhetsindex för buckling under 1 timme på  $\beta_{FO} = 0.561$

dvs  $P_{fn} = 0.287$

Direkt integration (Level III) ger  $P_{fn} = 0.275$

Monte Carlo simulering med 10000 sampel ger  $P_{fn} = 0.273$



Exempel på utfall  
vid en MC-  
simulering visas i  
figuren här intill

Vi ser att  
simuleringen inte  
exakt följer  
normalfördelningen

## Direkt beräkning av extremvärdesrisken ur risken vid en enskild kombination

På föregående sida togs endast hänsyn till belastningens extremvärdesfördelning. Vi antog således att panelens dimensioner inte ändrades vid de olika belastningarna.

Vi kan mycket lätt beräkna sannolikheten för att någon av  $n$  paneler utsatta var och en för en oberoende belastning, kommer att buckla. Detta motsvaras då av extremvärdesfördelningen av vår ursprungliga marginalfunktion.

$P_f$  för en enskild kombination av panel/belastningscykel har tidigare beräknats till ca 0.004 beroende på vilken metod som valts. I runda slängar var 250:e kombination kommer därför att leda till buckling. Det är uppenbart att i detta fall kommer risken för buckling att bli mycket stor vid 600 kombinationer.

Sannolikheten för att en enskild kombination inte leder till buckling är

$$P_r = (1 - P_f)$$

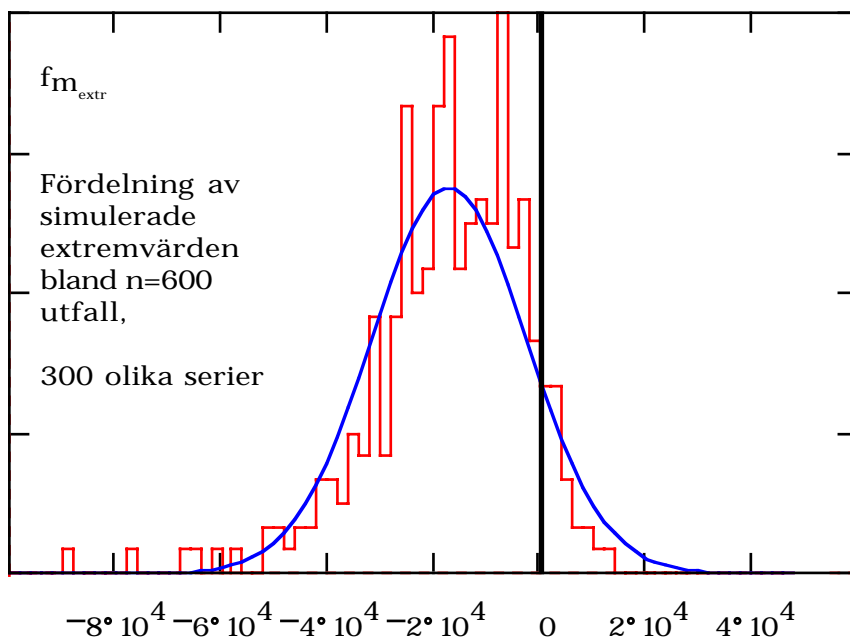
Sannolikheten att ingen kombination av  $n$  leder till buckling kan då skrivas

$$P_{rn} = (1 - P_f)^n$$

och motsvarande risken för att buckling kommer att inträffa

$$P_{fn} = 1 - (1 - P_f)^n$$

med  $n = 600$  och  $P_f = 0.0046$  ger detta  $P_{fn} = 0.937$



Som avslutning visas resultatet av en Monte Carlo simulering där det "värsta" fallet (minsta  $m$ ) av 600 sampel har beräknats 300 gånger.

Resultatet som alltså motsvarar en kombinerad extremvärdesfördelning ger i exemplet  $P_{fn} = 0.917$ !

En anpassning med normalfördelningen ger här en sämre approximation

$$P_{fn} = 0.881.$$